I.A. IBRAGIMOV

PROCESSUS ALÉATOIRES GAUSSIENS

PROCESSUS ALÉATOIRES GAUSSIENS

PAR

I. IBRAHIMOV et Y. ROZANOV

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

A Andreï Nikolaévitch KOLMOGOROV

PRÉFACE

Le présent ouvrage est essentiellement consacré à trois problèmes que nous étudierons dans le cas des processus gaussiens stationnaires. Premièrement, c'est la recherche des conditions de continuité (d'équivalence) absolue mutuelle des différentes distributions d'un segment de processus aléatoire et l'établissement des formules efficaces pour les densités des distributions équivalentes. Deuxièmement, c'est la description des classes des mesures spectrales correspondant à des processus réguliers, stationnaires au sens large ou strict (en particulier, satisfaisant à la condition bien connue de mélange intense *)) ainsi que des sous-classes qui se distinguent par la vitesse de mélange. Enfin, le troisième problème est l'estimation de la valeur moyenne inconnue d'un processus aléatoire, qui, après soustraction de cette valeur moyenne, se trouve être stationnaire, c'est-à-dire le problème de la séparation d'un signal noyé dans un bruit stationnaire. De plus, l'ouvrage traite d'un certain nombre de problèmes auxiliaires (distributions dans les espaces hilbertiens, différentes propriétés des fonctions échantillonnées, un certain nombre de théorèmes de la théorie de variable complexe, etc.).

Le problème de l'équivalence des différentes distributions gaussiennes de dimension infinie a su attirer l'attention de nombreux mathématiciens depuis 1958 (on peut trouver un exposé systématique des résultats obtenus dans [23] par exemple). Nous étudions le problème dans le cas des processus gaussiens stationnaires où nous espérons avoir obtenu des résultats définitifs.

Le second des problèmes mentionnés est étroitement lié aux questions ayant trait à la théorie ergodique des systèmes dynamiques gaussiens, à la théorie des pronostics des processus stationnaires et concerne (du point de vue probabiliste) la condition de dépendance faible du processus futur de son passé, dont l'exploitation systématique a permis de développer la théorie très fructueuse des théorèmes limites dans le cas d'une dépendance faible (voir, par exemple, [14], [22]) ; la condition la plus connue de ce type est certainement

*) Le terme correspondant anglais est « a strong mixing condition ».

celle de mélange intense. Les problèmes apparaissant lors de l'étude des différentes conditions de régularité, dans le cas gaussien, conduisent à des problèmes particuliers d'approximation de la théorie spectrale linéaire. Les études poussées entreprises dans ce domaine ont donné une solution presque définitive du problème. L'ouvrage expose les résultats de ces études.

Enfin, le problème de l'estimation de la moyenne paraît être le plus ancien et le mieux étudié de la statistique mathématique. On connaît deux méthodes traditionnelles de solution du problème : ou bien, connaissant la densité spectrale d'un bruit stationnaire on construit les meilleures estimations non biaisées, ou bien, quand ces données font défaut, on utilise la méthode des moindres carrés.

Nous proposons une classe générale d'estimations appelées « pseudo-meilleures » qui englobe tant les estimations classiques des moindres carrés que les meilleures estimations non biaisées. Nous en donnons les expressions explicites, trouvons les conditions de consistance, les formules asymptotiques de la matrice de corrélation des erreurs, établissons les conditions d'efficacité asymptotique.

Il y a lieu de mentionner que les résultats concernant les conditions de régularité et l'estimation de la moyenne sont formulés en termes spectraux et sont automatiquement transposables (dans le cadre de la théorie linéaire) à des processus quelconques, stationnaires au sens large.

Pour mieux orienter le lecteur nous avons pris soin d'indiquer dans le texte les ouvrages fondamentaux auxquels il peut se référer utilement et dont il trouvera la liste à la fin du livre.

Les auteurs

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

§ 1. Loi de probabilité de Gauss dans l'espace euclidien

On dit qu'une distribution **P** dans l'espace vectoriel à n dimensions R^n est *gaussienne* si la fonction caractéristique

$$\varphi(u) = \int\limits_{R^n} e^{i(u,x)} \mathbf{P}(dx), \quad u \in R^n,$$

$(u, x) = \sum u_k x_k$ désignant le produit scalaire des vecteurs $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est de la forme

$$\varphi(u) = \exp\left\{ i(u, a) - \frac{1}{2}(Bu, u) \right\}, \quad u \in R^n, \qquad (1.1.1)$$

où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ est la *valeur moyenne*, B un opérateur linéaire positif appelé *opérateur de corrélation*; on le donne par la matrice $\{B_{kj}\}$ appelée *matrice de corrélation* ou *matrice de covariances*. On a

$$(u, a) = \int\limits_{R^n} (u, x) \mathbf{P}(dx),$$

$$(Bu, v) = \int\limits_{R^n} [(u, x) - (u, a)] [(v, x) - (v, a)] \mathbf{P}(dx); \qquad (1.1.2)$$

$$u, v \in R^n.$$

La distribution **P** de valeur moyenne a et d'opérateur de corrélation B se trouve concentrée dans l'hyperplan à m dimensions L de l'espace R^n (m étant le rang de la matrice de corrélation) qu'on peut représenter sous la forme

$$L = a + BR^n.$$

Cette notation veut dire que L est l'ensemble de tous les vecteurs $y \in R^n$ de la forme $y = a + Bx$, $x \in R^n$. Notamment

$$\mathbf{P}(R^n \setminus L) = 0,$$

la distribution **P** étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dy de l'hyperplan L:

$$\mathbf{P}(\Gamma)=\int\limits_{\Gamma\cap L} p(y)\,dy, \tag{1.1.3}$$

où la densité de probabilité $p(y)$, $y\in L$, est

$$p(y)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}\det B}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(y-a),\ (y-a)\right)\right\}. \tag{1.1.4}$$

Ici $\det B$ désigne le déterminant de la matrice donnant l'opérateur B dans le sous-espace $R^m = BR^n$, et B^{-1} est l'opérateur inverse de B dans ce sous-espace.

§ 2. Fonctions aléatoires gaussiennes. Donnée de la mesure de probabilité

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ un certain espace de probabilité, c'est-à-dire un espace mesurable des éléments $\omega\in\Omega$ de mesure de probabilité **P** définie sur une certaine σ-algèbre $\mathfrak{A}$ des ensembles $A\subseteq\Omega$.

La fonction mesurable réelle $\xi=\xi(\omega)$ dans l'espace Ω est appelée variable aléatoire. L'ensemble des variables aléatoires $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ (le paramètre t parcourt un certain ensemble T) est appelé fonction aléatoire du paramètre $t\in T$. Les variables aléatoires $\xi(t)$ sont dites les valeurs de cette fonction aléatoire $\xi=\xi(t)$; lorsque $\omega\in\Omega$ est fixé la fonction réelle $\xi(\omega,\cdot)=\xi(\omega, t)$ de $t\in T$ est appelée échantillon ou trajectoire de la fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$.

Considérons un certain espace X des fonctions réelles $x=x(t)$ de $t\in T$ comprenant toutes les trajectoires $\xi=\xi(\omega, t)$, $t\in T$, de la fonction aléatoire $\xi=\xi(t)$ (tel est, par exemple, l'espace $X=R^T$ de toutes les fonctions réelles $x=x(t)$, $t\in T$). Désignons par $\mathfrak{B}$ la σ-algèbre minimale des ensembles de l'espace fonctionnel X contenant tous les ensembles cylindriques de cet espace, c'est-à-dire les ensembles de la forme

$$[x(t_1), \ldots, x(t_n)]\in\Gamma. \tag{1.2.1}$$

L'ensemble (1.2.1) se compose des seules fonctions $x=x(t)$ pour lesquelles les valeurs $[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$ aux points $t_1, \ldots, t_n\in T$ déterminent le vecteur appartenant à l'ensemble borélien Γ de l'espace vectoriel R^n à n dimensions. L'application $\xi=\xi(\omega)$ pour laquelle à chaque $\omega\in\Omega$ correspond la fonction échantillon $\xi(\omega,\cdot)=\xi(\omega, t)$ de $t\in T$, élément de l'espace X, est une application mesurable de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ dans l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$. Les ensembles $A\in\mathfrak{A}$ de la forme $A=\{\xi\in B\}$, qui sont les contre-images des ensembles $B\in\mathfrak{B}$ dans l'application

en question $\xi = \xi(\omega, \cdot)$, forment dans leur ensemble une σ-algèbre. Cette σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$ est minimale parmi les σ-algèbres contenant tous les ensembles de la forme

$$[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma. \tag{1.2.2}$$

L'ensemble (1.2.2) est formé des seuls éléments $\omega \in \Omega$ pour lesquels les valeurs $[\xi(\omega, t_1), \ldots, \xi(\omega, t_n)]$ déterminent un vecteur appartenant à l'ensemble borélien Γ de l'espace vectoriel R^n à n dimensions. On dit aussi que les $\xi(t)$, $t \in T$, engendrent la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$. La mesure de probabilité $\mathbf{P}_\xi$ définie sur la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ par la relation

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}, \quad B \in \mathfrak{B}, \tag{1.2.3}$$

s'appelle distribution de probabilités de la fonction aléatoire $\xi(t)$ (dans l'espace fonctionnel correspondant X).

Proposons-nous de savoir quand une famille donnée de variables aléatoires $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ dans l'espace Ω (le paramètre t prend toutes les valeurs de l'ensemble T) est une fonction aléatoire de distribution donnée $\mathbf{P}_\xi$, plus exactement, quand existe la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ dans l'espace Ω liée à la distribution $\mathbf{P}_\xi$ par la relation (1.2.3). On suppose ici que l'ensemble $\xi(\Omega)$ de toutes les fonctions échantillons $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ de $t \in T$ appartient à l'espace X.

Il est facile de voir qu'*une telle mesure de probabilité* $\mathbf{P}$ *existe si et seulement si l'ensemble* $\xi(\Omega)$ *possède une mesure extérieure complète*, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}_\xi(B) = 1 \text{ avec } B \supseteq \xi(\Omega) \tag{1.2.4}$$

pour tout ensemble mesurable $B \in X$.

En effet, si $\mathbf{P}_\xi$ est la distribution de la fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$, pour tout ensemble $\bar{B} \in X$, appartenant au complémentaire de l'ensemble $\xi(\Omega)$, la contre-image $\{\xi \in \bar{B}\}$ est un ensemble vide et

$$\mathbf{P}_\xi(\bar{B}) = \mathbf{P}\{\xi \in \bar{B}\} = 0.$$

D'un autre côté, pour tous ensembles $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ayant même contre-image $\{\xi \in B_1\} = \{\xi \in B_2\}$, la différence symétrique $B_1 \circ B_2 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ appartient au complémentaire de l'ensemble $\xi(\Omega)$, et sous la condition (1.2.4) on a

$$\mathbf{P}_\xi(B_1 \circ B_2) = 0, \quad \mathbf{P}_\xi(B_1) = \mathbf{P}_\xi(B_2).$$

Par conséquent, la relation

$$\mathbf{P}\{\xi \in B\} = \mathbf{P}_\xi(B), \quad B \in \mathfrak{B}, \tag{1.2.5}$$

définit la fonction univoque $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$ de tous les ensembles de la forme $A = \{\xi \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$, engendrée par les variables $\xi(t)$, $t \in T$. Il est évident que $\mathbf{P}$ est une mesure de

probabilité et $\xi = \xi(t)$ une fonction aléatoire dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ de distribution $\mathbf{P}_\xi$ donnée.

La mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$ engendrée par les variables $\xi(t)$, $t \in T$, est déterminée d'une manière univoque par les distributions $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ de dimension finie, chacune représentant une mesure de Borel dans l'espace vectoriel n-dimensionnel R^n correspondant, définie comme suit:

$$\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma) = \mathbf{P}\{[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)] \in \Gamma\}, \tag{1.2.6}$$

où $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ est la distribution du vecteur aléatoire $[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)]$. Notamment

$$\mathbf{P}(A) = \inf \sum_k \mathbf{P}(A_k), \tag{1.2.7}$$

où la limite inférieure est prise sur tous les ensembles A_k de la forme (1.2.2) recouvrant conjointement l'ensemble $A \in \mathfrak{A}$. Ceci se rapporte en particulier à la distribution $\mathbf{P}_\xi$ dans l'espace fonctionnel correspondant X, mesure de probabilité sur la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ engendrée directement par les variables données $\xi(t) = \xi(x, t)$ dans l'espace X, c'est-à-dire par des grandeurs de la forme

$$\xi(t, x) = x(t), \quad x \in X, \tag{1.2.8}$$

le paramètre t, fixé pour toutes les fonctionnelles $\xi(x, t) = x(t)$ de $x \in X$, parcourant tout l'ensemble T.

Désignons par $\Gamma \times R^{n-m}$ l'ensemble borélien dans l'espace n-dimensionnel des vecteurs $[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$ tels que $[x(t_{i_1}), \ldots, x(t_{i_m})] \in \Gamma$ (Γ est l'ensemble borélien dans le sous-espace m-dimensionnel $R^m \subseteq R^n$), les autres coordonnées $x(t_i)$ sont arbitraires. Les distributions de dimension finie sont compatibles en ce sens que

$$\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma \times R^{n-m}) = \mathbf{P}_{t_{i_1},\ldots,t_{i_m}}(\Gamma) \tag{1.2.9}$$

pour tous les ensembles du type mentionné.

Soit $X = R^T$ l'espace de toutes les fonctions réelles $x = x(t)$, $t \in T$. En vertu du théorème bien connu de Kolmogorov *), toute famille de distributions compatibles $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ détermine sur l'algèbre de tous les ensembles cylindriques (1.2.1) une fonction continue additive $\mathbf{P}$ (formule (1.2.6) où les grandeurs ont la forme explicite (1.2.8)). Cette fonction se trouve prolongée d'une manière univoque en mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{B}$. La fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$ à valeurs $\xi(t) = \xi(x, t)$ dans l'espace de probabilité $(X, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ possède des distributions de dimension finie coïncidant avec les distributions initiales compatibles $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$.

---

*) Voir [8], page 150.

A partir de la distribution $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\xi$ dans l'espace fonctionnel X, sous la condition (1.2.4), on peut déterminer (voir formule (1.2.5)) la mesure de probabilité dans l'espace correspondant Ω.

Les fonctions aléatoires $\xi = \xi(t)$ et $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ à valeurs dans un même espace de probabilité sont dites équivalentes si, avec une probabilité unité, pour presque tous les $\omega \in \Omega$, on a

$$\xi(\omega, t) = \tilde{\xi}(\omega, t)$$

pour tout $t \in T$ fixé. Il est évident que les distributions de dimension finie des fonctions aléatoires équivalentes coïncident. En passant à la fonction aléatoire équivalente $\xi = \xi(t)$ à trajectoires dans un espace fonctionnel X, on peut déterminer (voir formule (1.2.3)) dans cet espace la mesure de probabilité.

Des variables aléatoires sont dites *gaussiennes* si leurs distributions de dimension finie sont gaussiennes. Plus exactement, dans le cas d'une fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$ du paramètre $t \in T$, les valeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ et la fonction $\xi = \xi(t)$ elle-même sont dites *gaussiennes*, si toutes les distributions de dimension finie $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ sont gaussiennes. La mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$ engendrée par toutes les valeurs de $\xi(t)$ est également *gaussienne*.

Chacune des distributions de dimension finie $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ de la fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$ possède une moyenne $[a(t_1), \ldots, a(t_n)]$ et une matrice de corrélation $\{B(t_k, t_j)\}$, où $a(t)$, $t \in T$, est la *valeur moyenne* de la fonction aléatoire $\xi = \xi(t)$, et $B(s, t)$, $s, t \in T$, sa *fonction de corrélation* *):

$$a(t) = \mathbf{M}\xi(t),$$
$$B(s, t) = \mathbf{M}[\xi(s) - a(s)][\xi(t) - a(t)], \quad s, t \in T. \quad (1.2.10)$$

Ainsi, la mesure gaussienne $\mathbf{P}$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$ est déterminée d'une manière univoque par sa valeur moyenne $a(t)$, $t \in T$, et sa fonction de corrélation $B(s, t)$, $s, t \in T$.

La valeur moyenne $a(t)$, $t \in T$, peut être quelconque, et la fonction de corrélation $B(s, t)$, $s, t \in T$, n'a besoin que d'être définie positive:

$$\sum_{k, j=1}^{n} c_k c_j B(t_k, t_j) \geqslant 0 \quad (1.2.11)$$

pour $t_1, \ldots, t_n \in T$ quelconques et $c_1, \ldots, c_n$ réels.

Pour des fonctions $a(t)$, $t \in T$, quelconques et $B(s, t)$, $s, t \in T$, définie positive, il existe une fonction aléatoire gaussienne de valeur

*) $\mathbf{M}\xi$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\xi = \xi(\omega)$ dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$: $\mathbf{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega)$.

moyenne $a(t)$, $t \in T$, et de fonction de corrélation $B(s, t)$, $s, t \in T$. Les distributions gaussiennes $\mathbf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ de moyennes $[a(t_1), \ldots, a(t_n)]$ et de matrices de corrélation $\{B(t_k, t_j)\}$ se trouvent être compatibles et déterminent la mesure gaussienne $\mathbf{P}$ dans l'espace $X = R^T$ de toutes les fonctions réelles $x = x(t)$ de $t \in T$ définie sur la σ-algèbre $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_\xi$ engendrée par les valeurs $\xi(t) = \xi(x, t)$ de la forme (1.2.8) données directement sur X, le paramètre t parcourant l'ensemble T.

§ 3. Lemmes sur la convergence des variables gaussiennes

Soit $\xi_n = \xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de variables aléatoires dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On dit que la suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge en probabilité sur l'ensemble $A \in \mathfrak{A}$ vers une certaine grandeur $\xi = \xi(\omega)$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cap A) = 0. \tag{1.3.1}$$

Rappelons que la suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge en probabilité dans le cas et seulement dans le cas où elle est fondamentale *), c'est-à-dire que sur le même ensemble A converge en probabilité vers zéro la suite

$$\Delta_{nm} = \xi_n - \xi_m,\quad n, m = 1, 2, \ldots$$

L e m m e 1. *Si une suite de variables gaussiennes* ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *converge en probabilité sur un certain ensemble* $A \in \mathfrak{A}$ *d'une mesure positive* $\mathbf{P}(A) > 0$, *elle converge en moyenne :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}[\xi_n - \xi]^2 = 0. \tag{1.3.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\Delta_{nm} = \xi_n - \xi_m$ des variables gaussiennes. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$\mathbf{P}\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} = 2\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{nm}} \exp\left\{-\frac{(x - a_{nm})^2}{2\sigma_{nm}^2}\right\} dx,$$

où $a_{nm} = \mathbf{M}\Delta_{nm}$, $\sigma_{nm}^2 = \mathbf{M}(\Delta_{nm} - a_{nm})^2$. Supposons que la suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, ne converge pas en moyenne, ce qui équivaut à la condition

$$\overline{\lim_{n, m\to\infty}} (a_{nm}^2 + \sigma_{nm}^2) > 0.$$

*) Voir, par exemple, [8], page 90.

Il est facile de voir que, sous cette condition, pour un certain ε positif, on a

$$\overline{\lim_{n,\, m\to\infty}} \mathbf{P}\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} \geqslant 1 - p/2,$$

où $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Mais alors

$$\overline{\lim_{n,\, m\to\infty}} \mathbf{P}(\{|\Delta_{nm}| > \varepsilon\} \cap A) \geqslant p/2,$$

ce qui contredit la condition (1.3.1). Donc

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \mathbf{M}\Delta_{nm}^2 = \lim_{n,\, m\to\infty} (a_{nm}^2 + \sigma_{nm}^2) = 0,$$

c'est-à-dire que la suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, est fondamentale en moyenne et par conséquent converge en moyenne, ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, si une suite de variables gaussiennes ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, est convergente avec une probabilité positive, c'est-à-dire qu'elle converge pour toutes les valeurs de ω d'un certain ensemble $A \in \mathfrak{A}$ de mesure positive, elle converge en moyenne.

Considérons une suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, de variables gaussiennes indépendantes.

L e m m e 2. *La série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ *est convergente avec une probabilité positive si et seulement si la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^2$ *est convergente.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^2 = \mathbf{M} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2,$$

par conséquent, vu la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^2$, la grandeur $\xi^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2(\omega)$ est finie pour presque toutes les valeurs de $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ converge avec une probabilité unité. Supposons maintenant que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ converge avec une probabilité positive (en vertu de la loi bien connue de zéro ou un *), elle converge également avec une probabilité unité). La suite ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge alors en moyenne vers 0: $\mathbf{M}\xi_n^2 \to 0$ pour

*) Voir, par exemple, [8], page 157.

$n \to \infty$ (voir lemme 1). Posons $a_n = M\xi_n$, $\sigma_n^2 = M(\xi_n - a_n)^2$, on a alors

$$a_n^2 + \sigma_n^2 = M(\xi_n')^2 + \int\limits_{|x|>1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} dx,$$

où les variables aléatoires $\xi_n' = \xi_n'(\omega)$ sont définies comme suit:

$$\xi_n'(\omega) = \begin{cases} \xi_n(\omega) & \text{pour } |\xi_n| \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour } |\xi_n| > 1. \end{cases}$$

Pour $a_n^2 + \sigma_n^2 \to 0$ on a

$$\int\limits_{|x|>1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} dx = o(a_n^2 + \sigma_n^2),$$

donc

$$M(\xi_n')^2 \sim a_n^2 + \sigma_n^2.$$

En vertu du théorème bien connu des trois séries *) pour la convergence (avec une probabilité égale à 1) de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ dont les ξ_n^2, $n = 1, 2, \ldots$, sont indépendantes, il faut que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(\xi_n')^2 < \infty$. Mais $M(\xi_n')^2 \sim a_n^2 + \sigma_n^2$, par conséquent la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ entraîne $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \sigma_n^2) < \infty$.

§ 4. Variables gaussiennes dans l'espace de Hilbert

Une variable aléatoire ξ dans l'espace euclidien R^n à n dimensions est dite *gaussienne* si elle est répartie suivant la loi de Gauss.

Pour qu'une variable aléatoire $\xi \in R^n$ soit gaussienne il faut et il suffit que pour chaque $u \in R^n$ soit gaussienne la variable réelle $\xi(u) = (u, \xi)$, égale au produit scalaire des éléments u, $\xi \in R^n$.

En effet, la valeur au point $u \in R^n$ de la fonction caractéristique $\varphi(u)$ de la variable aléatoire $\xi \in R^n$ coïncide avec la valeur de la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $\xi(u) = (u, \xi)$ au point 1 et peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(u) = Me^{i(u,\,\xi)} = \exp\left\{i(u, a) - \frac{1}{2}(Bu, u)\right\}, \quad u \in R^n$$

(voir la formule (1.1.1), où (u, a) est la valeur moyenne, et (Bu, u) la variance de la variable gaussienne $\xi(u) = (u, \xi)$).

*) Voir, par exemple, [8], page 166.

Il est évident que pour que la variable aléatoire $\xi \in R^n$ soit gaussienne il faut et il suffit que le soit la fonction aléatoire de la forme $\xi(u) = (u, \xi)$ de $u \in R^n$.

Soit U un espace hilbertien complet et séparable et $\xi = \xi(\omega)$ une fonction dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans U. L'élément aléatoire ξ de l'espace hilbertien U est dit variable aléatoire dans U, si le produit scalaire (u, ξ) pour chaque $u \in U$ est une variable aléatoire réelle, c'est-à-dire une fonction mesurable dans $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

La variable aléatoire ξ de l'espace hilbertien U est dite *gaussienne*, si pour chaque $u \in U$ est gaussienne la variable aléatoire réelle $\xi(u) = (u, \xi)$. Ceci équivaut à ce que la fonction aléatoire $\xi(u) = (u, \xi)$ de $u \in U$ est gaussienne, car non seulement les différentes valeurs $\xi(u) = (u, \xi)$ le seront, mais également chacun des vecteurs $[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)]$.

En effet, pour tout vecteur $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ de l'espace vectoriel R^n à n dimensions le produit scalaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(u_k)$ est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi(u_k) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k, \ \xi\Big) = (u, \xi),$$

où $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in U$ et nous avons supposé la grandeur $\xi(u) = (u, \xi)$ gaussienne.

Il est évident que la valeur moyenne

$$a(u) = \mathbf{M}(u, \xi), \quad u \in U,$$

de la fonction aléatoire $\xi(u) = (u, \xi)$, $u \in U$, est une fonctionnelle linéaire, et la fonction de corrélation

$$B(u, v) = \mathbf{M}[(u, \xi) - a(u)][(v, \xi) - a(v)], \quad u, v \in U,$$

une fonctionnelle bilinéaire positive dans l'espace hilbertien U. Comme pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé le produit scalaire (u, ξ) est une fonction continue de $u \in U$, pour la fonction gaussienne $\xi(u) = (u, \xi)$ de $u \in U$ doit être assurée la continuité en moyenne (voir lemme 1):

$$\lim_{\|u-v\| \to 0} \mathbf{M}[(u, \xi) - (v, \xi)]^2 = 0, \tag{1.4.1}$$

$\|u\|$ désignant la norme de l'élément $u \in U$. Mais

$$\mathbf{M}[(u, \xi) - (v, \xi)]^2 = a(u - v)^2 + B(u - v, u - v)$$

et la condition (1.4.1) donne la continuité des fonctionnelles $a(u)$ et $B(u, v)$.

Comme toute fonctionnelle linéaire continue, la valeur moyenne $a(u)$ peut s'écrire sous la forme

$$a(u) = (u, a), \quad u \in U. \tag{1.4.2}$$

L'élément mentionné $a \in U$ est doué de la propriété suivante :

$$(u, a) = \int_\Omega (u, \xi(\omega)) \, \mathbf{P}(d\omega), \tag{1.4.3}$$

pour $u \in U$, et s'appelle *valeur moyenne* *) de la variable aléatoire $\xi \in U$.

Comme toute fonctionnelle bilinéaire positive continue, la fonction de corrélation $B(u, v)$ peut s'écrire sous la forme

$$B(u, v) = (Bu, v), \quad u, v \in U, \tag{1.4.4}$$

où B est un opérateur linéaire positif dans l'espace hilbertien U que l'on appelle *opérateur de corrélation.*

Nous allons montrer que l'opérateur de corrélation B est complètement continu.

En effet, toute suite orthonormée $v_1, v_2, \ldots$ converge lentement vers zéro, ainsi pour toutes les valeurs $\omega \in \Omega$ les variables gaussiennes $\xi_n = (v_n, \xi)$, $n = 1, 2, \ldots$, où $\xi = \xi(\omega) \in U$, convergent vers 0 pour $n \to \infty$. Par conséquent (voir lemme 1) elles convergent également en moyenne, c'est-à-dire

$$\mathbf{M}\xi_n^2 = (Bv_n, v_n) \to 0$$

(ici et dans la suite, pour simplifier l'écriture, on suppose la valeur moyenne $a \in U$ égale à zéro). Si l'on admet que l'opérateur B n'est complètement continu, alors à l'extérieur d'un certain voisinage ε de zéro on pourrait trouver une infinité de points du spectre (compte tenu de l'ordre de multiplicité) et par conséquent une infinité de sous-espaces orthogonaux invariants, pour chacun des éléments desquels on ait

$$(Bu, u) = \int_{|\lambda| > \varepsilon} \lambda d(E_\lambda u, u) \geqslant \varepsilon \|u\|^2,$$

où $B = \int \lambda \, dE_\lambda$ est la représentation spectrale de l'opérateur symétrique continu B.

Puis on choisit une base orthonormée complète parmi les éléments propres $v_1, v_2, \ldots$ de l'opérateur B complètement continu symétrique positif, correspondant aux valeurs propres $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$

*) Pour l'intégrabilité des fonctions à valeurs dans l'espace hilbertien, voir, par exemple, [26].

Les valeurs correspondantes $\xi_k = (v_k,\ \xi)$, $k = 1, 2, \ldots$ ne sont pas corrélées:

$$\mathbf{M}\xi_k\xi_j = (Bv_k,\ v_j) = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{pour } j = k, \\ 0 & \text{pour } j \neq k. \end{cases}$$

De plus

$$\sum_1^\infty \xi_k^2(\omega) = \sum_1^\infty (v_k,\ \xi(\omega))^2 = \|\xi(\omega)\|^2.$$

On sait que les variables gaussiennes non corrélées sont indépendantes et que la convergence de la série $\sum_1^\infty \xi_k^2(\omega)$ pour tous les ω entraîne la convergence de la série $\sum_1^\infty \mathbf{M}\xi_k^2$ (voir lemme 2). Par conséquent

$$\sum_1^\infty (Bv_k,\ v_k) = \sum_1^\infty \mathbf{M}\xi_k^2 = \sum_1^\infty \sigma_k^2 < \infty,$$

c'est-à-dire que l'opérateur de corrélation B est nucléaire *), car pour tout système orthonormé $u_1, u_2, \ldots \in U$ on a

$$\sum_1^\infty (Bu_k,\ u_k) < \infty. \tag{1.4.5}$$

Ainsi, si $\xi \in U$ est une variable aléatoire gaussienne, la fonction aléatoire $\xi(u) = (u,\ \xi)$ du paramètre $u \in U$ possède une moyenne du type (1.4.2) et une fonction de corrélation du type (1.4.4), l'opérateur de corrélation B y figurant étant un opérateur nucléaire dans l'espace hilbertien U.

Supposons maintenant que $\xi(u)$, $u \in U$, soit une fonction gaussienne quelconque ayant une moyenne de la forme (1.4.2) et une fonction de corrélation de la forme (1.4.4), où B est un opérateur nucléaire dans l'espace hilbertien U. Il existe alors une fonction aléatoire $\xi(u)$, $u \in U$, et une variable gaussienne $\xi = \xi(\omega)$ dans U telles que

$$\xi(u) = (u,\ \xi), \quad u \in U. \tag{1.4.6}$$

La variable mentionnée $\xi \in U$ pour presque toutes les issues élémentaires ω peut être donnée par la formule

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^\infty \xi(v_k)\, v_k, \tag{1.4.7}$$

*) Voir, par exemple, [5], page 55.

où $v_1, v_2, \ldots$ est un système orthonormé complet formé par les éléments propres de l'opérateur nucléaire B. En vertu de la relation

$$\mathrm{M} \sum_{k=1}^{\infty} \xi(v_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} B(v_k, v_k) < \infty$$

pour les variables gaussiennes indépendantes $\xi(v_1)$, $\xi(v_2), \ldots$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(v_k)^2$ converge avec une probabilité unité.

En effet, $\xi(u)$, $u \in U$, est une fonctionnelle linéaire aléatoire en ce sens qu'avec une probabilité unité on a

$$\xi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \xi(u_1) + \lambda_2 \xi(u_2)$$

pour tous réels λ_1, λ_2 et tous éléments $u_1, u_2 \in U$, car, comme on peut facilement le voir

$$\mathrm{M}\,[\xi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - \lambda_1 \xi(u_1) - \lambda_2 \xi(u_2)]^2 = 0.$$

De plus, cette fonctionnelle aléatoire $\xi(u)$ est continue en moyenne (voir (1.4.1) et plus bas) et vu

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u, v_k)\, v_k,$$

on a

$$\xi(u) = \lim_{n\to\infty} \xi\Big(\sum_{k=1}^{n} (u, v)\, v_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u, v_k)\, \xi(v_k)$$

(au sens de la convergence en moyenne), et de plus, avec une probabilité unité, on a

$$(u, \xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(u, \sum_{k=1}^{n} \xi(v_k)\, v_h\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u, v_k)\, \xi(v_k)$$

de telle sorte qu'avec une probabilité unité pour chacune des valeurs $\xi(u)$ de la fonction aléatoire initiale $\xi(u)$, $u \in U$, l'égalité (1.4.6) se trouve satisfaite.

On arrive au résultat suivant *).

Théorème 1. *Pour qu'une fonctionnelle gaussienne* $\xi(u)$, $u \in U$, *sur l'espace hilbertien* U *admette la représentation par la formule* (1.4.6) *il faut et il suffit que sa moyenne* $a(u)$, $u \in U$, *et sa fonction de corrélation* $B(u, v)$, $u, v \in U$, *soient des fonctionnelles continues, la première linéaire et la seconde bilinéaire, de plus dans la représentation* (1.4.4) *de* $B(u, v)$ *l'opérateur correspondant* B *doit être nucléaire.*

---

*) A propos des distributions dans les espaces linéaires, voir par exemple Yu. Prohorov, *The method of characteristic functionals*, Proc. 4th Berkeley sympos., t. 2, 1961, 403-419.

Il est bien connu qu'on peut identifier l'espace hilbertien U à l'espace conjugué X de toutes les fonctionnelles continues dans U. Chacune de ces fonctionnelles $x \in X$ est donnée d'une manière univoque par la formule $x = (u, x)$, $u \in U$, où $x \in U$ est un élément donné de l'espace hilbertien U. En vertu de ce qui a été exposé au § 2, à toute fonction aléatoire gaussienne $\xi(u)$, $u \in U$, de la forme (1.4.6) correspond la distribution $\mathbf{P}_\xi$ dans l'espace hilbertien $X = U$ (les « fonctionnelles échantillonnées » $\xi(u) = (u, \xi(\omega))$, $u \in U$, appartiennent à X). La mesure gaussienne $\mathbf{P}_\xi$ est déterminée sur la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ engendrée par les ensembles cylindriques de $X = U$ de la forme

$$[(u_1, x), \ldots, (u_n, x)] \in \Gamma, \tag{1.4.8}$$

où $u_1, \ldots, u_n \in U$ et Γ sont les ensembles boréliens de l'espace euclidien à n dimensions; la σ-algèbre mentionnée $\mathfrak{B}$ est de toute évidence engendrée par les variables de la forme

$$\xi(x, u) = (u, x), \quad x \in X, \tag{1.4.9}$$

où le paramètre u parcourt tout l'espace $U = X$.

Pour tout élément $a \in U$ et un opérateur nucléaire positif B il existe une fonction gaussienne $\xi(u)$, $u \in U$, de la forme (1.4.6) de valeur moyenne $a \in U$ et dont l'opérateur de corrélation est B. Il existe également sur l'espace de probabilité $(X, \mathfrak{B}, \mathbf{P}_\xi)$ une fonction gaussienne de ce type donnée directement dont les valeurs sont définies par la formule (1.4.9).

E x e m p l e. Variables gaussiennes dans l'espace fonctionnel $\mathcal{L}^2(T)$.

Soit $\xi = \xi(t)$ un processus aléatoire gaussien qui sur le segment T de droite réelle possède une moyenne $a(t)$, $t \in T$, et une fonction de corrélation $B(s, t)$, $s, t \in T$, satisfaisant à la condition suivante: pour tous $s, t \in T$ on a

$$\lim_{s \to t} [a(s) - a(t)] = 0, \tag{1.4.10}$$

$$\lim_{s \to t} [B(s, s) - 2B(s, t) + B(t, t)] = 0.$$

Cette condition impose la continuité en moyenne du processus aléatoire $\xi = \xi(t)$:

$$\lim_{s \to t} \mathbf{M}[\xi(s) - \xi(t)]^2 = 0.$$

On sait*) que dans ce cas il existe un processus équivalent mesurable $\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}(\omega, t)$ tel que la fonction $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\omega, t)$ du couple de variables (ω, t) sur le produit des espaces $\Omega \times T$ soit mesurable. Nous allons supposer que soit mesurable le processus gaussien

*) Voir, par exemple, [8], page 209.

initial $\xi = \xi(t)$. Supposons que la condition suivante soit également remplie

$$\int_T a^2(t)\,dt < \infty, \quad \int_T B(t, t)\,dt < \infty. \tag{1.4.11}$$

Cette condition signifie que

$$\int_T \mathbf{M}\xi^2(t)\,dt < \infty.$$

En vertu du théorème de Fubini des intégrations répétées on a

$$\int_T \mathbf{M}\xi^2(t)\,dt = \int_\Omega \int_T \xi^2(\omega, t)\,dt\,\mathbf{P}(d\omega) < \infty$$

et presque toutes les fonctions échantillons $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ de $t \in T$ appartiennent à l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2(T)$ des fonctions réelles de carré intégrable $u = u(t)$ de $t \in T$ dont le produit scalaire est

$$(u, v) = \int_T u(t)\,v(t)\,dt.$$

En déterminant convenablement les valeurs $\xi(\omega, t)$ pour ceux des $\omega \in \Omega$ pour lesquels les fonctions échantillons $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, n'appartiennent pas à $\mathscr{L}^2$ (l'ensemble de tels $\omega \in \Omega$ a une mesure nulle), on peut passer à un processus gaussien mesurable $\xi = \xi(t)$ dont toutes les fonctions échantillons appartiennent à l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2$. On peut considérer la fonction aléatoire $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ comme un élément aléatoire de l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2$.

Considérons les produits scalaires

$$(u, \xi) = \int_T u(t)\,\xi(\omega, t)\,dt, \quad u \in U.$$

Comme $\xi = \xi(\omega, t)$ est une fonction mesurable des variables (ω, t), alors pour chaque $u \in U$ donné la fonction réelle (u, ξ) de $\omega \in \Omega$ est également mesurable et se trouve être une variable aléatoire. Ainsi $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ est une variable aléatoire dans l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2(T)$. En vertu du théorème de Fubini la valeur moyenne de la fonction aléatoire $\xi(u) = (u, \xi)$ de $u \in U$ est

$$a(u) = \int_T u(t)\,a(t)\,dt = (u, a), \quad u \in U, \tag{1.4.12}$$

et sa fonction de corrélation

$$B(u, v) = \int_T \int_T u(s)\,v(t)\,B(s, t)\,ds\,dt = (Bu, v), \quad u, v \in U, \tag{1.4.13}$$

où l'opérateur de corrélation B est donné par son noyau $B(s, t)$, soit

$$Bu(t) = \int_T B(s, t) u(s)\, ds.$$

La variable aléatoire $\xi \in \mathscr{L}^2$ est gaussienne. En effet, comme on peut facilement le voir, $(u, \xi) = \int_T u(t) \xi(t)\, dt$ est, pour la fonction continue $u = u(t)$ de $t \in T$, la limite en moyenne des variables gaussiennes de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} u(t_k) \xi(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

où $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ sont des points de partition du segment T, et pour une fonction quelconque $u \in \mathscr{L}^2$ la grandeur (u, ξ) se trouve être la limite en moyenne des variables gaussiennes (u_n, ξ), où $u_n = u_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de fonctions continues convergeant en moyenne vers la fonction $u = u(t)$. Or, la limite d'une suite de variables gaussiennes est, comme on sait, également gaussienne *).

§ 5. Lois et espérances mathématiques conditionnelles

Soit $\xi(u) = \xi(\omega, u)$, $u \in U$, une famille de variables gaussiennes dans l'espace de probabilité Ω et $\mathfrak{A}(U)$ la σ-algèbre des ensembles de l'espace Ω engendrée par toutes les $\xi(u) = \xi(\omega, u)$ sur Ω, le paramètre u parcourant un certain ensemble U. Pour plus de simplicité nous allons supposer que $\mathbf{M}\xi(u) = 0$, $u \in U$. Désignons par $\boldsymbol{H}(U)$ l'espace hilbertien des variables aléatoires η, mesurables par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}(U)$, dont le produit scalaire est

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \mathbf{M}(\eta_1 \cdot \eta_2). \tag{1.5.1}$$

Désignons par $H(U)$ l'enveloppe linéaire fermée de toutes les $\xi(u)$, $u \in U$. Soient S et T des sous-ensembles dans U.

Considérons un élément η de $H(S)$ et sa projection $\hat{\eta}$ sur le sous-espace $H(T)$. Comme $H(U)$ est un ensemble de variables gaussiennes, la différence $\Delta = \eta - \hat{\eta}$, en tant que variable gaussienne orthogonale à toutes les $\xi(t)$, $t \in T$, ne dépend pas de celles-ci. Ainsi

$$\eta = \hat{\eta} + \Delta, \tag{1.5.2}$$

où $\hat{\eta}$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$, et Δ est une variable gaussienne, indépendante de $\xi(t)$, $t \in T$, de valeur moyenne

*) Voir, par exemple, [8], page 33.

nulle et de variance $\sigma^2 = M(\eta - \hat{\eta})^2$. Il est facile de voir que la distribution conditionnelle *) de η par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ existe toujours et pour presque tous les ω est une distribution gaussienne de moyenne

$$M\{\eta/\mathfrak{A}(T)\} = \hat{\eta}(\omega) \tag{1.5.3}$$

et de variance constante

$$\sigma^2 = M\{(\eta - \hat{\eta})^2/\mathfrak{A}(T)\} = M(\eta - \hat{\eta})^2. \tag{1.5.4}$$

Rappelons que l'espérance mathématique conditionnelle $M\{\eta/\mathfrak{A}(T)\}$ est, du point de vue géométrique, la projection de l'élément $\eta \in \boldsymbol{H}(U)$ sur le sous-espace $\boldsymbol{H}(T)$ et dans le cas présent c'est la grandeur $\hat{\eta}$, projection sur le sous-espace $H(T)$.

Comme on sait, tous les moments des variables gaussiennes existent. Désignons par $H^n(U)$ la fermeture du sous-espace de toutes les grandeurs de la forme

$$\eta = \varphi[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)], \tag{1.5.5}$$

où $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ est un polynôme de degré au plus n d'un nombre quelconque de variables $x_1, \ldots, x_k$ et $u_1, \ldots, u_k \in U$.

Théorème 2. *L'espérance mathématique conditionnelle* $\hat{\eta} = M\{\eta/\mathfrak{A}(T)\}$ *d'une variable quelconque* $\eta \in H^n(S)$ *fait partie du sous-espace* $H^n(T)$ *(avec le même exposant* n*)*:

$$M\{\eta/\mathfrak{A}(T)\} \in H^n(T). \tag{1.5.6}$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut considérer que les ensembles S et T sont finis (par exemple $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ et $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$). En effet, un peut passer au cas général par un passage à la limite *):

$$\eta = \lim_{m\to\infty} \eta_m, \quad M\{\eta/\mathfrak{A}(T)\} = \lim_{m\to\infty} M\{\eta_m/\mathfrak{A}(T)\},$$

en entendant ici la convergence en moyenne, et

$$\eta_m = \varphi_m[\xi(s_{k_1}), \ldots, \xi(s_{k_m})]$$

et encore

$$M[\eta/\mathfrak{A}(T)] = \lim_{m\to\infty} M[\eta/\xi(t_{k_1}), \ldots, \xi(t_{k_m})].$$

Soit $\eta = \varphi[\xi(s_1), \ldots, \xi(s_k)]$, où $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ est un polynôme dont le degré n'est pas supérieur à n. Comme nous l'avons déjà dit le théorème est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour tous les exposants ne dépassant pas $n - 1$. Désignons par $\hat{\xi}(s_j)$ les projections des éléments $\xi(s_j)$, $j = 1, \ldots, k$, sur le sous-espace

*) Voir, par exemple, [12].

$H(T)$. Les différences $\xi(s_j) - \hat{\xi}(s_j)$, $j = 1, \ldots, k$, ne dépendent pas des $\xi(t)$, $t \in T$. Posons

$$\zeta = \varphi[\xi(s_1) - \hat{\xi}(s_1), \ldots, \xi(s_k) - \hat{\xi}(s_k)]$$

La grandeur ζ ne dépend pas de $\xi(t)$, $t \in T$, et dans le développement

$$\eta - \zeta = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi[\xi(s_1), \ldots, \xi(s_k)]\, \hat{\xi}(s_j) + \ldots$$

le second membre est une combinaison linéaire des expressions de la forme

$$\varphi_m[\xi(s_1), \ldots, \xi(s_k)] \cdot \psi_{n-m}[\hat{\xi}(s_1), \ldots, \hat{\xi}(s_k)],$$

où $\varphi_m(x_1, \ldots, x_k)$ et $\psi_{n-m}(x_1, \ldots, x_k)$ sont des polynômes dont le degré n'est pas supérieur à m et $n-m$ respectivement, de plus $m \leqslant n-1$. Par hypothèse, l'espérance mathématique conditionnelle $\hat{\eta}_m = \mathbf{M}[\eta_m/\mathfrak{A}(T)]$ de la variable $\eta_m = \varphi_m[\xi(s_1), \ldots \ldots, \xi(s_k)]$ fait partie du sous-espace $H^m(T)$, $m \leqslant n-1$. Il est évident que le produit $\hat{\eta}_m \cdot \psi_{n-m}[\hat{\xi}(s_1), \ldots, \hat{\xi}(s_k)]$, fait partie du sous-espace $H^n(T)$. Toute combinaison linéaire de ces produits qu'est l'espérance mathématique conditionnelle $\hat{\eta} - \mathbf{M}\zeta$ de la différence $\eta - \zeta$ fait également partie de $H^n(T)$. On a donc $\hat{\eta}_m = \mathbf{M}[\eta/\mathfrak{A}(T)] \in H^n(T)$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons trouver les polynômes d'Hermite de plusieurs variables.

Soit $\mathbf{P}(dx)$ une mesure gaussienne dans l'espace à k dimensions R^k des vecteurs $x = [x_1, \ldots, x_k]$ et $\boldsymbol{H}$ l'espace de Hilbert de toutes les fonctions réelles de carré intégrable $\varphi = \varphi(x)$ de $x \in R^k$ dont le produit scalaire est

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{R^k} \varphi(x)\, \psi(x)\, P(dx).$$

On sait *) que tous les moments d'une mesure gaussienne existent,

*) On peut expliquer ceci de la manière suivante. Il est évident que le système de fonctions de la forme $e^{i(t,x)}$, $(t, x) = \Sigma\, t_k x_k$ est complet dans un espace complexe $\boldsymbol{H}$, et

$$\left\| e^{i(t,x)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{[i(t,x)]^n}{n!} \right\|^2 \leqslant C \frac{\sigma^{2(n+1)}}{[(n+1)!} \to 0,$$

où

$$\sigma^2 = \int (t, x)^2 P(dx).$$

de plus l'ensemble de tous les polynômes $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ des variables $x_1, \ldots, x_k$ est partout un ensemble dense dans $\boldsymbol{H}$. Tout polynôme $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ de degré p, orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à p, est appelé *polynôme d'Hermite*.

Désignons par H_p l'ensemble de tous les polynômes d'Hermite de même degré p. Il est évident que H_p est un espace de dimension finie, l'espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ étant la somme des sous-espaces orthogonaux H_p, $p = 0, 1, \ldots$:

$$\boldsymbol{H} = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p.$$

Considérons un vecteur gaussien $[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)]$. Désignons par $H_p(u_1, \ldots, u_k)$ l'ensemble de toutes les grandeurs de la forme

$$\eta = \varphi[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)],$$

où $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ est le polynôme d'Hermite de degré p par rapport à la distribution $\mathbf{P}$ de la variable vectorielle $[\xi(u_1), \ldots, \xi(u_k)]$. Il est clair que l'on a

$$\boldsymbol{H}(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p(u_1, \ldots, u_k). \qquad (1.5.7)$$

L e m m e 3. *Quels que soient* $s_1, \ldots, s_k$ *et* $t_1, \ldots, t_l$, *les sous-espaces* $H_p(s_1, \ldots, s_k)$ *et* $H_q(t_1, \ldots, t_l)$ *sont orthogonaux pour différents* p *et* q, *c'est-à-dire que*

$$H_p(s_1, \ldots, s_k) \perp H_q(t_1, \ldots, t_l) \text{ pour } p \neq q. \qquad (1.5.8)$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par exemple, que $p < q$ et considérons l'élément arbitraire $\eta \in H_p(s_1, \ldots, s_k)$ et son espérance mathématique conditionnelle $\hat{\eta} = \mathbf{M}\{\eta/\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_l)\}$. En vertu du théorème 2 la grandeur $\hat{\eta}$ appartient au sous-espace $H^p(t_1, \ldots, t_l) = \sum_{r=0}^{p} \oplus H_r(t_1, \ldots, t_l)$. Mais $\hat{\eta}$ est la projection de η sur tout le sous-espace $\boldsymbol{H}(t_1, \ldots, t_l)$, par conséquent la différence $\eta - \hat{\eta}$ est orthogonale à $\boldsymbol{H}(t_1, \ldots, t_l)$ et en particulier $\eta - \hat{\eta} \perp H_q(t_1, \ldots, t_l)$. De plus $\hat{\eta} \perp H_q(t_1, \ldots, t_l)$ comme appartenant au sous-espace $H^p(t_1, \ldots, t_l)$ orthogonal à $H_q(t_1, \ldots, t_l)$ pour $p < q$. Par conséquent

$$\eta = [(\eta - \hat{\eta}) + \hat{\eta}] \perp H_q(t_1, \ldots, t_l),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Puis nous allons définir le sous-espace $H_p(U)$ comme une enveloppe linéaire fermée de tous les sous-espaces $H_p(u_1, \ldots, u_k)$, où

$u_1, \ldots, u_k \in U$ et l'exposant p est le même pour tous les $u_1, \ldots$ $\ldots, u_k$. Il est évident qu'en vertu des relations (1.5.7) et (1.5.8) on a

$$H^n(U) = \sum_{p=0}^{n} \oplus H_p(U), \quad \boldsymbol{H}(U) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus H_p(U), \qquad (1.5.9)$$

où $H_0(U)$ ne contient que des constantes; $H_1(U) = H(U)$ est l'enveloppe linéaire fermée des $\xi(u) \in U$; $H_2(U)$ est celle des $[\xi(u_1)\xi(u_2) - B(u_1, u_2)]$, où $u_1, u_2 \in U$; $H_3(U)$ est l'enveloppe linéaire fermée des $[\xi(u_1)\xi(u_2)\xi(u_3) - \xi(u_1)B(u_2, u_3) - \xi(u_2)B(u_1, u_3) - \xi(u_3)B(u_1, u_2)]$, où $u_1, u_2, u_3 \leqslant U$, etc.

Comme on peut le voir à partir du développement (1.5.9), l'espérance mathématique conditionnelle $\mathbf{M}[\eta/\mathfrak{A}(T)]$ de tout $\eta \in \in H_p(S)$ par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ fait partie du sous-espace $H_p(T)$ (avec le même exposant p).

Ecrivons la formule générale des moments:

$$\mathbf{M}\xi(u_1)\ldots\xi(u_n) = \sum \prod B(u_k, u_j), \qquad (1.5.10)$$

où la somme est prise sur toutes les partitions de l'ensemble $(u_1, \ldots$ $\ldots, u_n)$ en couples (u_k, u_j), et le produit sur tous les couples (u_k, u_j) d'une partition.

Cette formule s'obtient à partir de la relation

$$\mathbf{M}\xi(u_1)\ldots\xi(u_n) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_n}\varphi(0),$$

où $\varphi(\lambda) = \mathbf{M}\exp\{i(\lambda, \xi)\}$ est la fonction caractéristique du vecteur gaussien $\xi = [\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)]$ ayant pour expression (voir (1.1.1))

$$\varphi(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k,\,j=1}^{n} \lambda_k\lambda_j B(u_k, u_j)\right\}, \quad \lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

§ 6. Processus gaussiens stationnaires et représentation spectrale

On dit qu'un processus gaussien $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ d'un paramètre entier (discret) ou réel t, $-\infty < t < \infty$ (à valeurs dans l'espace de probabilité Ω) est *stationnaire* si sa valeur moyenne est constante:

$$a(t) = \mathbf{M}\xi(t) \equiv a,$$

et sa fonction de corrélation $B(s, t)$ ne dépend que de la différence $s - t$:

$$B(s, t) = \mathbf{M}[\xi(s) - a][\xi(t) - a] = B(s - t) \qquad (1.6.1)$$

(ultérieurement nous allons poser $a = 0$).

Dans la relation (1.6.1) la fonction $B(t)$ est appelée *fonction de corrélation* du processus stationnaire $\xi(t)$; elle peut s'écrire sous la forme

$$B(t)=\int e^{i\lambda t}F(d\lambda), \tag{1.6.2}$$

où $F(d\lambda)$ est dite *mesure spectrale* du processus stationnaire $\xi(t)$ qui est une mesure positive bornée. Dans la formule (1.6.2) l'intégrale est prise dans les limites $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ lorsque le temps t est discret et $-\infty<\lambda<\infty$ lorsque le temps t est continu.

Le processus stationnaire $\xi(t)$ admet une représentation spectrale de la forme

$$\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda), \tag{1.6.3}$$

où $\Phi(d\lambda)$ est une *mesure spectrale stochastique* telle que

$$\mathrm{M}\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)}=F(\Delta_1\cap\Delta_2).$$

Tout η appartenant à une enveloppe linéaire fermée $H(T)$ des $\xi(t)$, $t\in T$, admet la représentation spectrale suivante:

$$\eta=\int\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda), \tag{1.6.4}$$

où $\varphi(\lambda)$ est une fonction de l'espace $L_T(F)$ qui est l'enveloppe linéaire réelle des fonctions $e^{i\lambda t}$ de λ, $t\in T$, fermée par rapport au produit scalaire

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_F=\int\varphi_1(\lambda)\,\overline{\varphi_2(\lambda)}\,F(d\lambda), \tag{1.6.5}$$

l'intégrale stochastique (1.6.4) est déterminée pour toute fonction $\varphi\in L_T(F)$ et donne $\eta\in H(T)$. La relation $\eta\leftrightarrow\varphi(\lambda)$ est un isomorphisme unaire *) des espaces de Hilbert $H(T)$ et $L_T(F)$:

$$\langle\eta_1,\eta_2\rangle=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_F. \tag{1.6.6}$$

Dans le cas où le paramètre t varie d'une manière continue et l'ensemble T est un intervalle fini, l'espace $L_T(F)$ pourrait être déterminé comme la fermeture de l'espace L^0, par rapport au produit scalaire (1.6.5), de toutes les fonctions de la forme

$$\varphi(\lambda)=\int_T e^{i\lambda t}u(t)\,dt, \tag{1.6.7}$$

où $u=u(t)$ est une fonction infiniment dérivable s'annulant à l'extérieur de l'intervalle T. Comme pour $\lambda\to\infty$ les fonctions $\varphi(\lambda)$ décroissent plus rapidement que $|\lambda|^{-n}$ quel que soit n, le produit scalaire du type (1.6.5) peut être introduit sur l'espace L^0 non seulement

*) A propos de tout ce qui vient d'être dit, voir, par exemple, [22].

à l'aide d'une mesure spectrale finie, mais également à l'aide d'une mesure $G(d\lambda)$ de finitude σ satisfaisant pour un certain n naturel à la condition

$$\int (1+\lambda^2)^{-n}\, G(d\lambda) < \infty.$$

Posons

$$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_G = \int \varphi_1(\lambda)\, \overline{\varphi_2(\lambda)}\, G(d\lambda) \tag{1.6.8}$$

et définissons l'espace hilbertien complet $L_T(G)$ comme la fermeture de toutes les fonctions du type (1.6.7) par rapport au produit scalaire (1.6.8).

Soit $L_T(G)$ un tel espace hilbertien. La formule (1.6.4) donne la fonctionnelle aléatoire $\eta = \eta(\varphi)$ définie sur le sous-espace $L_T(G) \cap L_T(F)$ dense partout. Il y a lieu de trouver les conditions pour lesquelles $\eta = \eta(\varphi)$ est (à l'équivalence près) un élément aléatoire de l'espace conjugué à $L_T(G)$, donc une fonctionnelle linéaire *continue* gaussienne sur l'espace hilbertien $L_T(G)$.

Dans le cas où $\eta = \eta(\varphi)$ est un élément aléatoire de l'espace conjugué à $L_T(G)$, c'est-à-dire quand

$$\eta(\varphi) = \langle \varphi, \eta\rangle_G, \tag{1.6.9}$$

où $\eta = \eta(\lambda)$ est une fonction gaussienne à trajectoires dans l'espace hilbertien $L_T(G)$, l'opérateur de corrélation B peut être déterminé à partir des relations

$$\langle B\varphi_1, \varphi_2\rangle_G = \mathrm{M}\eta(\varphi_1)\,\eta(\varphi_2) = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_F = \\ = \langle A\varphi_1, A\varphi_2\rangle_F = \langle A^*A\varphi_1, \varphi_2\rangle_G,$$

où A est un opérateur de l'espace hilbertien $L_T(G)$ dans l'espace hilbertien $L_T(F)$ déterminé par l'égalité

$$A\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda), \quad \varphi \in L_T(G) \cap L_T(F), \tag{1.6.10}$$

et A^* l'opérateur conjugué au premier de $L_T(F)$ dans $L_T(G)$. Comme tout opérateur de corrélation, B doit être nucléaire.

D'un autre côté, si $B = A^*A$ est nucléaire, on peut affirmer que, selon le théorème 1, la fonctionnelle linéaire gaussienne $\eta = \eta(\varphi)$ avec la fonctionnelle de corrélation $\langle B\varphi_1, \varphi_2\rangle_G$ est équivalente à un élément gaussien de la forme (1.6.9) de l'espace conjugué à $L_T(G)$.

Notons que non seulement pour un opérateur nucléaire, mais également pour un opérateur simplement borné $B = A^*A$ on a l'inclusion

$$L_T(G) \subseteq L_T(F),$$

car

$$\|\varphi\|_F^2 = \langle A\varphi, A\varphi\rangle_F = \langle B\varphi, \varphi\rangle_G \leqslant \|B\|\cdot\|\varphi\|_G^2.$$

Notons que pour une mesure finie $G(d\lambda)$ la formule (1.6.9) équivaut à la représentation spectrale suivante du processus stationnaire initial $\xi(t)$, $t \in T$:

$$\xi(t) = \int e^{-i\lambda t}\eta(\lambda) G(d\lambda), \quad t \in T. \tag{1.6.11}$$

En effet, les fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$ forment un système complet dans l'espace hilbertien $L_T(G)$ et la formule (1.6.11), en vertu de laquelle $\eta(e^{i\lambda t}) = \langle e^{i\lambda t}, \eta\rangle_G$, $t \in T$, s'étend à tout l'espace $L_T(G)$, enveloppe linéaire fermée des fonctions du type $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$.

Pour avoir affaire directement au processus aléatoire initial $\xi(t)$, $t \in T$, et non pas à sa fonctionnelle $\eta(\varphi)$, $\varphi \in L_T(G)$, il est utile d'introduire l'espace X de toutes les fonctions réelles $x = x(t)$, $t \in T$, admettant une « représentation spectrale» de la forme

$$x(t) = \int e^{-i\lambda t}\psi(\lambda) G(d\lambda), \quad t \in T, \tag{1.6.12}$$

où $\psi(\lambda) \in L_T(G)$; les valeurs de $x(t)$ coïncident avec les valeurs de la fonctionnelle linéaire continue $\langle\varphi, \psi\rangle_G$ pour $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$. Il est clair que la formule (1.6.12) donne une correspondance biunivoque entre les éléments $x \in X$ et $\psi \in L_T(G)$.

En introduisant le produit scalaire

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle\psi_1, \psi_2\rangle_G \tag{1.6.13}$$

(où ψ_1 et ψ_2 correspondent à x_1 et x_2) X devient un espace complet de Hilbert.

Envisageons séparément le cas où $G(d\lambda) = \frac{1}{2\pi} d\lambda$ et l'espace hilbertien $L_T(G)$ est formé de fonctions du type

$$\psi(\lambda) = \int_T e^{i\lambda t}x(t)\, dt, \tag{1.6.14}$$

où $x = x(t)$ appartient à l'espace classique $\mathscr{L}^2(T)$ des fonctions réelles de carré intégrable dont le produit scalaire est

$$\langle x_1, x_2\rangle = \int_T x_1(t)\, x_2(t)\, dt,$$

la formule (1.6.14) indiquant une transformation de Fourier. En vertu de l'égalité de Plancherel on a

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle\psi_1, \psi_2\rangle_G = \int \psi_1(\lambda)\, \overline{\psi_2(\lambda)}\, \frac{d\lambda}{2\pi},$$

donc si les formules (1.6.11), (1.6.12) sont entendues comme des transformations de Fourier, l'espace hilbertien X de toutes les fonctions de carré intégrable $x = x(t)$, $t \in T$, correspond formellement au principe général de construction des espaces hilbertiens de produit scalaire (1.6.13).

En fait nous avons démontré ci-dessus le théorème suivant.

Théorème 3. *Pour que le processus aléatoire* $\xi(t)$, $t \in T$, *soit (à l'équivalence près) un élément aléatoire de l'espace hilbertien* X *il faut et il suffit que pour l'opérateur* A *défini par l'égalité* (1.6.10) *le produit* $B = A^*A$ *soit un opérateur nucléaire dans l'espace hilbertien* $L_T(G)$.

Plus loin nous établirons que pour une classe très importante de mesures absolument continues $F(d\lambda)$ et $G(d\lambda)$ de densités $f(\lambda) = F(d\lambda)/d\lambda$ et $g(\lambda) = G(d\lambda)/d\lambda$
l'opérateur A^*A *est nucléaire sous la condition*

$$\int \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\, d\lambda < \infty. \tag{1.6.15}$$

Notons qu'il existe également une classe importante de cas où l'opérateur A^*A n'est pas nucléaire si la condition (1.6.15) ne se trouve pas remplie.

Au chapitre III on envisagera un opérateur de la forme $\Delta = A_1^*A_1 - E$, où A_1^* est un opérateur du même type que A mais appliquant $L_T(G)$ dans $L_T(G_1)$ muni de la mesure $G_1(d\lambda)$ de densité $g_1(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda)$. Comme $f(\lambda) = g_1(\lambda) - g(\lambda)$, on a

$$\langle \Delta\varphi, \psi\rangle_G = \langle A_1^*A_1\varphi, \psi\rangle - \langle\varphi, \psi\rangle_G = \\ = \langle\varphi, \psi\rangle_{G_1} - \langle\varphi, \psi\rangle_G = \langle\varphi, \psi\rangle_F = \langle A^*A\varphi, \psi\rangle_G$$

pour tous $\varphi, \psi \in L_T(G)$, par conséquent l'opérateur A^*A coïncide avec Δ. On peut montrer (voir théorème 17 du chapitre III) que la condition

$$\int \left[\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\right]^2 d\lambda < \infty$$

est suffisante pour que l'opérateur $\Delta = A^*A$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. Donc si l'on introduit l'espace $L_T(F_1)$ avec $f_1(\lambda) = \sqrt{f(\lambda)\, g(\lambda)}$, les opérateurs du type envisagé apparaissant lors de l'application

$$L_T(G) \xrightarrow{B_1} L_T(F_1) \text{ et } L_T(F_1) \xrightarrow{B_2} L_T(F),$$

sont tels que sous la condition (1.6.15) $B_1^*B_1$ et $B_2^*B_2$ se trouvent être des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Il est facile de voir que l'opérateur $A^*A = B_1^*B_2^*B_2B_1$ est nucléaire (voir, par exemple, [5], page 57).

§ 7. Quelques propriétés des trajectoires*)

1. Dérivabilité en moyenne. Relations asymptotiques. Soit $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, un processus gaussien stationnaire à temps continu t.

*) Pour plus de détails voir [27].

Le processus $\xi(t)$ est *dérivable* (en moyenne) si existe la limite (en moyenne)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} = \xi'(t).$$

Pour que la limite mentionnée existe il faut et il suffit que dans l'espace de Hilbert $L_T(F)$, où $T=(-\infty, \infty)$, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{i\lambda h}-1}{h} e^{i\lambda t} = i\lambda e^{i\lambda t}$$

existe, ce qui de toute évidence équivaut à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 F(d\lambda) < \infty, \tag{1.7.1}$$

$F(d\lambda)$ étant ici la mesure spectrale du processus aléatoire $\xi(t)$. Si

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda)$$

est la représentation spectrale du processus gaussien stationnaire $\xi(t)$, sa dérivée $\xi'(t)$, $-\infty < t < \infty$, qui est également un processus gaussien stationnaire, est égale à

$$\xi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (i\lambda) \Phi(d\lambda).$$

Il est facile de voir que la condition (1.7.1) équivaut à

$$\mathbf{M}[\Delta_h \xi(t)]^2 = \Delta_{-h}\Delta_h B(0) = O\{h^2\} \tag{1.7.2}$$

pour $h\to 0$, où $B(t)$ est la fonction de corrélation, et Δ_h est le symbole de l'opérateur de la différence: par exemple, $\Delta_h B(t) = B(t+h)-B(t)$. En effet, sous la condition (1.7.2), pour Λ quelconque, on a

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda^2 F(d\lambda) \leqslant C \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{1-\cos\lambda h}{h^2} F(d\lambda) \leqslant C\, \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^2}$$

pour h suffisamment petit, quelque grand que soit Λ, où C est une certaine constante, alors (1.7.1) découle immédiatement de (1.7.2).

Considérons le processus stationnaire non dérivable $\xi(t)$. Proposons-nous de trouver les limitations imposées à la mesure spectrale $F(d\lambda)$ pour lesquelles on a la relation

$$\Delta_{-h}\Delta_h B(0) = O\{|h|^{2\alpha}\},\ 0<\alpha<1. \tag{1.7.3}$$

On a

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^{2\alpha}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-\cos\lambda h}{h^2}\right)^{\alpha} (1-\cos\lambda h)^{1-\alpha} F(d\lambda) \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} F(d\lambda),$$

ainsi la condition (1.7.3) se trouve remplie si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} F(d\lambda) < \infty. \tag{1.7.4}$$

Nous allons nous arrêter plus en détail sur le cas où la densité spectrale $f(\lambda) = F(d\lambda)/d\lambda$ existe. Supposons que pour λ suffisamment grand, $|\lambda| \geqslant \Lambda$, on a

$$f(\lambda) = |\lambda|^{-\beta},$$

(où $\beta > 1$ car la densité spectrale $f(\lambda)$ est une fonction intégrable). Pour un processus stationnaire non dérivable $\beta \leqslant 3$; supposant $\beta < 3$, on obtient

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^{2\alpha}} = 2\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{1-\cos\lambda h}{\lambda^{\beta} h^{2\alpha}}\, d\lambda + O\{h^{2(1-\alpha)}\}.$$

Après le changement de variable $\lambda h = u$ on a *)

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{1-\cos\lambda h}{\lambda^{\beta} h^{2\alpha}}\, d\lambda = h^{\beta-2\alpha-1} \int_{\Lambda h}^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\beta}}\, du \sim h^{\beta-2\alpha-1} \int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos h}{u^{\beta}}\, du$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^{2\alpha}} \sim C h^{\beta-2\alpha-1},$$

où

$$C = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\beta}}\, du.$$

Les relations obtenues montrent que si

$$f(\lambda) = O\{|\lambda|^{-\beta}\}, \tag{1.7.5}$$

la condition (1.7.3) se trouve remplie pour $2\alpha = \beta - 1$; si encore

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\, f(\lambda)\,|\lambda|^{\beta} = \infty, \tag{1.7.6}$$

*) La relation $\alpha \sim \beta$ pour les variables α et β signifie que $\lim \alpha/\beta = 1$.

on a également pour $2\alpha=\beta-1$

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^{2\alpha}}=\infty.$$

D'une manière analogue pour une densité spectrale $f(\lambda)$ du type (1.7.5) pour $\beta=3$ on obtient

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^2}\leqslant C\int\limits_{Ah}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^3}\,du+O(1)=O\{|\ln|h||\}$$

et par conséquent

$$\Delta_{-h}\Delta_h B(0)=O\{h^2|\ln|h||\}. \qquad (1.7.7)$$

2. Module de continuité. Considérons un processus gaussien stationnaire non dérivable $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$, dont la fonction de corrélation $B(t)$ satisfait à la condition (1.7.3).

Théorème 4. *Sous la condition* (1.7.3) *il existe un processus gaussien* $\xi(t)$ *équivalent, tel que, pour h suffisamment petit, on a uniformément en t pour chacune de ses trajectoires dans tout intervalle fini*

$$|\Delta_h\xi(t)|\leqslant C|h|^{\alpha}|\ln|h||^{1/2}, \qquad (1.7.8)$$

où C est une constante.

Démonstration. Pour h suffisamment petit on a

$$\mathbf{P}\{|\Delta_h\xi(t)|>c'|h|^{\alpha}|\ln||h||^{1/2}\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\frac{|\Delta_h\xi(t)|}{|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|^{1/2}}>\frac{c'}{c''}|\ln|h||^{1/2}\right\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{c'}{c''}|\ln|h||^{1/2}}e^{-x^2/2}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{c'}{c''}|\ln|h||^{1/2}}xe^{-x^2/2}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{c'}{c''}\right)^2\ln|h|}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}|h|^{\beta},\quad \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{c'}{c''}\right)^2,$$

où c'' est une constante dans la relation $\Delta_{-h}\Delta_h B(0)\leqslant c''|h|^{2\alpha}$ et c' est prise de telle sorte que $\beta>1$.

Nous allons considérer le processus initial $\xi(t)$ en des points binaires rationnels de la forme $t=k/2^n$, supposant pour plus de simplicité que $0\leqslant t\leqslant 1$. Pour $h=2^{-n}$ on a

$$\mathbf{P}\left\{\max_k\left|\Delta_h\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|>c'|h|^{\alpha}|\ln|h||^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}|h|^{\beta}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}2^{-(\beta-1)n}.$$

Comme $\beta > 1$ et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(\beta-1)n}$ est convergente, en vertu du lemme de Borel-Cantelli la quantité

$$\left|\Delta_h \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leqslant c' \, |h|^{\alpha} \, |\ln|h||^{1/2},$$

pour h suffisamment petit, est uniformément convergente pour tous les $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

Il est facile de voir que tout segment $[k/2^n, k_1/2^{n_1}]$ peut être composé d'une somme de segments $[r/2^m, (r+1)/2^m]$, où r, m sont des nombres entiers, de plus, pour m quelconque, on peut avoir dans cette somme deux segments au plus de la forme mentionnée. Ainsi, pour h quelconque (pour n dans l'intervalle $2^{-n} \leqslant h \leqslant 2^{-n+1}$) on a

$$h = \frac{k_1}{2^{n_1}} - \frac{k}{2^n} = \sum_m{}^{*} 2^{-m},$$

où Σ^* désigne la sommation sur les m correspondants. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, pour h suffisamment petit

$$\left|\Delta_h \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_m{}^{*} \left|\Delta_2 - m\xi\left(\frac{r}{2^m}\right)\right| \leqslant \sum_m{}^{*} c' 2^{-\alpha m} \, |\ln 2^m|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha n} (\ln 2^n)^{1/2} \, 2c' \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-\alpha(m-n)} \left(\frac{\ln 2^m}{\ln 2^n}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant |h|^{\alpha} \, |\ln|h||^{1/2} \, 2c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \, |h|^{\alpha} \, |\ln|h||^{1/2}.$$

Ainsi, avec une probabilité égale à l'unité les trajectoires du processus étudié $\xi(t)$ satisfont à la condition (1.7.8) sur l'ensemble de tous les points binaires rationnels; en particulier pour presque tous les $\omega \in \Omega$ les trajectoires $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$ sont des fonctions uniformément continues sur l'ensemble dense partout des points binaires rationnels t_{kn}. Il est évident que pour un point arbitraire t existe la limite $\lim_{t_{kn} \to t} \xi(\omega, t_{kn})$ qui pour presque tous les $\omega \in \Omega$ coïncide avec la valeur initiale $\xi(t) = \xi(\omega, t)$. Il est évident que pour un processus équivalent dont les valeurs sont déterminées comme

$$\xi(\omega, t) = \lim_{t_{kn} \to t} \xi(\omega, t_{kn}),$$

pour presque tous les ω les trajectoires vérifient la condition (1.7.8). En déterminant convenablement pour les autres ω les valeurs de

$\xi(\omega, t)$ (posant, par exemple, $\xi(\omega, t) \equiv 0$), on obtient le processus équivalent $\xi(t)$ dont toutes les trajectoires satisfont à la condition (1.7.8). Le théorème se trouve ainsi démontré.

3. Théorèmes limites. Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire gaussien stationnaire non dérivable de fonction de corrélation $B(t)$. Nous allons supposer que partout sur l'intervalle $(0, \tau)$, sauf en un nombre fini de points, existe la dérivée seconde $B''(t)$ n'ayant que des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire que pour un point t quelconque à l'intérieur de l'intervalle $(0, \tau)$ existent les limites finies $B''(t-0) = \lim_{h\to 0} B(t-h)$ et $B''(t+0) = \lim_{h\to 0} B(t+h)$. Rappelons que pour un processus non dérivable $\xi(t)$ on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^2} = \infty, \tag{1.7.9}$$

ce qui veut dire qu'au point $t=0$ la dérivée $B''(t)$ accuse une discontinuité de seconde espèce, plus exactement

$$\lim_{h\to 0} B''(h) = -\infty.$$

Théorème 5. *La relation limite suivante se trouve vérifiée*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{[\Delta_h \xi(kh)]^2}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)} = 1, \tag{1.7.10}$$

où $h = \tau/N$ et la limite est entendue au sens de la convergence en moyenne.

Démonstration. Soit n le nombre de points de discontinuité de la fonction $B''(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. On peut associer à chaque point de discontinuité t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, un certain intervalle tel que la longueur totale de ces intervalles ne dépasse pas ε. Désignons par I_ε le complément à la réunion de ces intervalles (I_ε est la réunion d'un nombre fini de segments). Il est évident que la fonction $B''(t)$ est uniformément continue sur l'ensemble I_ε et

$$\Delta_{-h}\Delta_h B(t) = O\{B''(t)\,h^2\} \tag{1.7.11}$$

uniformément en $t \in I_\varepsilon$. Compte tenu de la relation (1.7.7) on voit que

$$\Delta_{-h}\Delta_h B(t) = o\{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)\} \tag{1.7.12}$$

uniformément en $t \in I_\varepsilon$. Comme en même temps que la fonction de corrélation $B(t)$ la fonction $\Delta_{-h}\Delta_h B(t)$ est également définie positive, pour tout t on a

$$|\Delta_{-h}\Delta_h B(t)| \leqslant |\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|. \tag{1.7.13}$$

On a alors

$$\mathrm{M}\Delta_h \xi(s)\, \Delta_h \xi(t) = \Delta_{-h}\Delta_h B(s-t)$$

et en vertu de la formule générale (1.5.10)

$$\mathbf{M}[\Delta_h\xi(s)\cdot\Delta_h\xi(t)\cdot\Delta_h\xi(u)\cdot\Delta_h\xi(v)] = \Delta_{-h}\Delta_h B(s-t)\cdot\Delta_{-h}\Delta_h B(u-v) + \Delta_{-h}\Delta_h B(s-u)\cdot\Delta_{-h}\Delta_h B(t-v) + \Delta_{-h}\Delta_h B(s-v)\cdot\Delta_{-h}\Delta_h B(t-u).$$

Il est facile de voir que

$$\sigma^2(h) = \mathbf{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Delta_h\xi(kh)^2}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)} - 1\right]^2 = \frac{2}{N^2}\sum_{k,\,j=0}^{N-1}\left[\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B((k-j)h)}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}\right]^2. \qquad (1.7.14)$$

Pour j donné chaque intervalle de longueur δ peut contenir au plus $1 + [\delta h^{-1}]$ points de la forme $(k - j)\,h$, et en tout on aura au maximum $N(1 + [\delta h^{-1}])$ points. Par conséquent, le nombre de points de la forme $(k - j)\,h$ appartenant au complémentaire de l'ensemble I_ε mentionné ci-dessus n'est pas supérieur à $(Nn + N^2\varepsilon/\tau)$. En vertu des relations (1.7.11)-(1.7.14) on obtient pour h suffisamment petit, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sigma^2(h) \leqslant \frac{2}{N^2}\left(Nn + N^2\frac{\varepsilon}{\tau}\right) + 2\left\{\max_{t\in I_\varepsilon}\left[\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(t)}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}\right]^2\right\} \leqslant C\varepsilon,$$

où C est une constante. Le théorème 5 se trouve ainsi démontré.

Notons qu'il existe une suite $h_1, h_2, \ldots$ pour laquelle la relation limite (1.7.10) est vérifiée avec une probabilité unité. Ce qui plus est, on peut prendre comme telle une suite quelconque satisfaisant à la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(h_n) < \infty, \qquad (1.7.15)$$

car pour cette condition il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que

$$\sum_{h=h_n}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{[\Delta_h\xi(kh)]^2}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)} - 1\right| \geqslant \varepsilon_n\right\} < \infty,$$

or, en vertu du lemme de Borel-Cantelli, pour $h = h_n$ (1.7.10) converge avec une probabilité égale à l'unité.

Il serait intéressant d'étudier la vitesse de convergence pour $h \to 0$ de la fonction $\sigma^2(h)$ définie par (1.7.14):

$$\sigma^2(h) = \frac{2}{N^2}\frac{h^2}{[\Delta_{-h}\Delta_h B(0)]^2}\sum_{k,\,j=0}^{N-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B((k-j)h)]^2.$$

L e m m e 4. *Sous les hypothèses formulées ci-dessus relativement à la fonction $B''(t)$ on a l'estimation suivante:*

$$d^2(h)=\sum_{k,\,j=0}^{N-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B((k-j)h)]^2=$$
$$=O\{\max(|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|,\ |\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|^2|h|^{-1})\}. \qquad (1.7.16)$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que

$$d^2(h)=O\left\{h^{-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B(0)]^2+h^2\iint\limits_{|s-t|>2h}[B''(s-t)]^2\,ds\,dt\right\}.$$

Pour $\delta>0$ quelconque donné

$$\iint\limits_{|s-t|>2h}[B''(s-t)]^2\,ds\,dt=O\left\{\int_{2h}^{\delta}B''(t)^2\,dt\right\},$$

et si dans un voisinage $(0, \delta)$ la fonction $B''(t)$ est monotone on a

$$\int_{2h}^{\delta}B''(t)^2\,dt=B''(2h+\theta)[B'(\delta)-B'(2h)],$$

où $2h\leqslant\theta\leqslant\delta$ et

$$B''(2h+\theta)=O\{h^2\Delta_{-h}\Delta_h B(0)\}.$$

Si la fonction $B''(t)$ est monotone, dans le voisinage $(0, \delta)$ elle conserve son signe, de sorte que $B'(t)$ est également monotone. Il est évident que la fonction

$$\Delta_h B(t)=\int_t^{t+h}B'(s)\,ds$$

est aussi monotone. Donc, lorsque $|B'(2h)|\to\infty$ pour $h\to 0$ on a

$$|B'(2h)|=O\{h^{-1}[\Delta_h B(h)]\},$$

où la monotonie de la fonction $\Delta_h B(t)$ entraîne

$$|\Delta_h B(h)|\leqslant|\Delta_h B(0)|=\frac{1}{2}|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|.$$

Donc

$$\iint\limits_{|s-t|>2h}[B''(s-t)]^2\,ds\,dt=$$
$$=O\begin{cases}h^{-2}|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|, & \text{si } B'(2h) \text{ est bornée;}\\ h^{-3}|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|^2, & \text{si } B'(2h) \text{ n'est pas bornée.}\end{cases}$$

On obtient finalement

$$d^2(h) = O\{\max(|h|^{-1}|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|^2, \ |\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|)\}.$$

La relation (1.7.16) donne pour la fonction $\sigma^2(h)$ l'estimation suivante:

$$\sigma^2(h) = O\left\{\max\left(|h|, \frac{h^2}{|\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|}\right)\right\}. \qquad (1.7.17)$$

En particulier, sous la condition (1.7.3) la fonction $\sigma^2(h)$ décroît pour $h \to 0$ comme une certaine puissance $|h|^\beta$:

$$\sigma^2(h) = O\{|h|^\beta\}, \ \beta = \max\{1, 2(1-\alpha)\},$$

aussi la condition (1.7.15) se trouvera-t-elle remplie, par exemple, pour une suite de la forme $h_n = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Pour le type de processus gaussiens stationnaires envisagé on a le résultat suivant, complétant le théorème 5.

Théorème 6. *Sous la condition*

$$\Delta_{-h}\Delta_h B = o\{|h|^{1/2}\}, \qquad (1.7.18)$$

on a la relation limite

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta_h\xi(kh)\,\Delta_h\xi(t+kh) = B'(t-0) - B'(t+0), \qquad (1.7.19)$$

où t est un point quelconque donné de l'intervalle $(0, \tau)$, $N = [h^{-1}(\tau - t)] - 1$ *et la convergence est entendue en moyenne.*

Démonstration. Des calculs aussi élémentaires que ceux qu'on a faits précédemment montrent que la grandeur

$$\eta(h) = h^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta_h\xi(kh)\,\Delta_h\xi(t+kh)$$

a pour valeur moyenne

$$\mathbf{M}\eta(h) = \frac{\Delta_h\Delta_{-h}B(t)}{h} = \frac{B(t-h)-B(t)}{h} - \frac{B(t+h)-B(t)}{h},$$

sa variance satisfaisant à la condition

$$\mathbf{D}\eta(h) \leqslant Cd^2(h).$$

Les estimations (1.7.16) pour la grandeur $d^2(h)$ montrent que sous la condition (1.7.18) on a la relation (1.7.19).

Il est évident que pour une suite $h = h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, décroissant suffisamment rapidement cette relation sera vraie avec une probabilité égale à l'unité.

CHAPITRE II

STRUCTURE DES ESPACES $H(T)$ ET $L_T(F)$

§ 1. Préliminaires

1. Introduction. Dans le chapitre précédent (§ 6) nous avons vu que l'espace de Hilbert de variables aléatoires $H(T)$ engendré par les valeurs du processus stationnaire $\xi(t)$, $t \in T$, de mesure spectrale $F(d, \lambda)$, est isométrique à l'espace des fonctions $L_T(F)$, enveloppe linéaire fermée des fonctions $e^{i\lambda t}$ de $\lambda \in [-\pi, \pi]$ pour t discret et de $\lambda \in (-\infty, \infty)$ pour t continu. Ceci permet d'étudier les processus stationnaires par des méthodes analytiques. A cet effet il y a lieu tout d'abord d'étudier plus en détail la structure analytique des espaces $L_T(F)$, ce que nous allons faire dans ce chapitre en nous limitant au cas où T est un intervalle ou une demi-droite.

Il est évident que l'on peut se limiter à l'intervalle $T = [-\tau, \tau]$ ou $T = [0, \tau]$ ou aux demi-droites $T = (-\infty, 0]$, $T = [0, \infty)$, car tout autre intervalle ou demi-droite T_1 s'obtiennent par déplacement de T d'une certaine valeur réelle t et l'espace $L_{T_1}(F)$ correspondant s'obtient à partir de $L_T(F)$ en introduisant le facteur $e^{i\lambda t}$.

Pour que le lecteur puisse se faire une idée des résultats qu'il y a lieu d'attendre ici nous allons supposer que $\xi(t)$ est un processus stationnaire à temps discret et de densité spectrale $f(\lambda) = 1$. Il est clair que $L_T(F)$ se compose dans ce cas de polynômes trigonométriques $P(e^{i\lambda}) = \sum_{t \in T} c(t)\, e^{i\lambda t}$ si T est un intervalle fini et coïncide en fait avec l'espace de Hardy $\mathscr{H}^2$ dans le cercle (ou à l'extérieur du cercle), si T est une demi-droite, plus exactement si $L_T(F)$ se compose de fonctions $\varphi(\lambda)$ de carré intégrable, pouvant être décomposées en série de Fourier unilatérale :

$$\varphi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{0} c(t)\, e^{i\lambda t} \quad \text{pour} \quad T = (-\infty, 0]$$

$$\left(\text{ou} \quad \varphi(\lambda) = \sum_{0}^{\infty} c(t)\, e^{i\lambda t} \quad \text{pour} \quad T = [0, \infty)\right).$$

Voyons les propriétés dont est doué l'espace $L_T(F)$ si $f(\lambda) \neq 1$ dans le cas où le temps est continu.

Il est bon de noter tout d'abord que si les mesures spectrales $F(d\lambda)$ et $G(d\lambda)$ sont liées par l'inégalité

$$F(d\lambda) \geqslant G(d\lambda)$$

($F(d\lambda)$ majore $G(d\lambda)$), les espaces hilbertiens correspondants $L_T(F)$ et $L_T(G)$ satisfont à l'inclusion

$$L_T(F) \subseteq L_T(G).$$

Cette propriété évidente est la conséquence du fait qu'une suite fondamentale quelconque de fonctions de la forme $\varphi_n(\lambda) = \sum_k c_{kn} e^{i\lambda t_{kn}}$, $n = 1, 2, \ldots$, dans l'espace $L_T(F)$, convergeant vers la fonction $\varphi(\lambda) \in L_T(F)$, est également fondamentale dans l'espace $L_T(G)$:

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_G \leqslant \|\varphi_m - \varphi_n\|_F \to 0$$

pour $m, n \to \infty$, la fonction limite $\psi(\lambda) \in L_T(G)$ coïncidant presque partout par rapport à $G(d\lambda)$ avec la fonction limite mentionnée plus haut. Par conséquent les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ coïncident en tant qu'éléments de l'espace hilbertien $L_T(G)$, c'est-à-dire $\varphi(\lambda) \in L_T(G)$.

Il s'ensuit immédiatement que dans le cas d'une densité spectrale $f(\lambda) = F(d\lambda)/d\lambda$ du type *)

$$f(\lambda) \asymp 1 \tag{2.1.1}$$

(pour un temps t discret), tout comme pour $f(\lambda) = 1$ l'espace $L_{[0, \tau]}(F)$ est constitué de tous les polynômes

$$P(e^{i\lambda}) = \sum_{t=0}^{\tau} c(t) e^{i\lambda t}$$

à coefficients $c(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, réels et les espaces $L_{(-\infty, 0]}(F)$ ($L_{[0, \infty)}(F)$) sont formés de fonctions de carré intégrable, pouvant s'écrire sous la forme de séries de Fourier

$$\varphi(e^{i\lambda}) = \sum_{-\infty}^{0} c(t) e^{i\lambda t} \quad \left(\varphi(e^{i\lambda}) = \sum_{0}^{\infty} c(t) e^{i\lambda t}\right),$$

et coïncidant avec les valeurs limites (pour $r \to 1$) des fonctions analytiques $\varphi(z)$ dans le cercle $|z| < 1$ (à l'extérieur du cercle) de la classe de Hardy $\mathscr{H}^2$ mentionnée ci-dessus

$$\varphi(e^{i\lambda}) = \lim_{r \to 1} \varphi(z), \qquad z = re^{i\lambda}.$$

Dans le cas d'un temps continu t la condition (2.1.1) se trouve remplacée par

$$f(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-n}, \tag{2.1.2}$$

où n est un nombre naturel.

*) Rappelons que pour les variables α et β la relation $\alpha \asymp \beta$ signifie que $0 \leqslant c_1 \leqslant \alpha/\beta \leqslant c_2 < \infty$.

Pour $n = 0$ l'espace $L_{[0,\tau]}(F)$ défini au § 6 du chapitre I se compose évidemment des fonctions $\varphi(\lambda)$ de carré intégrable et admettant une représentation par une intégrale de Fourier de la forme $\varphi(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t} c(t)\,dt$, d'une manière analogue les espaces $L_{(-\infty, 0]}(F)$ $(L_{[0,\infty)}(F))$ se composent de fonctions de la forme $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} c(t)\,dt \left(\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} c(t)\,d(t)\right)$.

En ne faisant appel qu'à des notions élémentaires on peut montrer que *sous la condition* (2.1.2) *l'espace* $L_{[0,\tau]}(F)$ *coïncide avec la classe des fonctions du type*

$$\varphi(\lambda) = P(i\lambda) + (1 + i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t} c(t)\,dt, \tag{2.1.3}$$

où $P(i\lambda)$ *est un polynôme de degré au plus* $n-1$ *(à coefficients réels), et* $c(t)$ *une fonction (réelle) de carré intégrable.*

En effet, l'espace $L_{[0,\tau]}(F)$ contient toutes les fonctions $\varphi(\lambda) = (i\lambda)^k e^{i\lambda s}$, $k = 1, \ldots, n-1$, qui sont des limites de la forme

$$\varphi(\lambda) = \lim_{h\to 0} (i\lambda)^{k-1} \frac{e^{i\lambda(s+h)} - e^{i\lambda s}}{h},$$

de sorte que tout polynôme $P(i\lambda) = \sum_0^{n-1} c_k (i\lambda)^k$ appartient à $L_{[0,\tau]}(F)$. Les fonctions $\varphi(\lambda) = (1 + i\lambda)^{n-1}(e^{(1+i\lambda)s} - 1)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, appartenant également à $L_{[0,\tau]}(F)$ peuvent s'écrire comme

$$\varphi(\lambda) = (1 + i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t} c_s(t)\,dt,$$

où

$$c_s(t) = \begin{cases} e^t & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant s, \\ 0 & \text{pour } s \leqslant t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'enveloppe linéaire fermée des fonctions $\varphi(\lambda) = (1 + i\lambda)^{n-1}(e^{(1+i\lambda)s} - 1)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$, et $\varphi(\lambda) = (i\lambda)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, donne tout l'espace $L_{[0,\tau]}(F)$ (étant par définition l'enveloppe linéaire fermée des fonctions $e^{i\lambda s}$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$), car à partir des fonctions $\varphi(\lambda)$ on peut, par intégrations successives, passer aux fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda s}$; par exemple

$$\int_0^t (1 + i\lambda)^{n-1} e^{(1+i\lambda)s}\,ds = (1 + i\lambda)^{n-2}(e^{(1+i\lambda)t} - 1), \text{ etc.}$$

Il est également évident que l'enveloppe linéaire des fonctions en escalier $c_s(t)$ de la forme mentionnée, où le paramètre s parcourt le segment $[0, \tau]$, est dense partout dans l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2[0, \tau]$ des fonctions $c(t)$, $0 \leqslant t \leqslant r$, de carré intégrable. De plus, pour les fonctions $\varphi'(\lambda)$ et $\varphi''(\lambda)$ de la forme

$$\varphi(\lambda) = (1 + i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t} c(t)\, dt,$$

où $c(t)$ est la combinaison linéaire des fonctions en escalier $c_s(t)$, on a en vertu de l'égalité de Parseval

$$\|\varphi'(\lambda) - \varphi''(\lambda)\|_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(\lambda) - \varphi''(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \asymp$$

$$\asymp \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(\lambda) - \varphi''(\lambda)|^2 |1 + i\lambda|^{2n} d\lambda = 2\pi \int_0^\tau |c'(t) - c''(t)|^2 dt.$$

Il est évident que l'enveloppe linéaire fermée de toutes les fonctions $\varphi(\lambda)$ de la forme mentionnée coïncide avec la classe de fonctions représentées par les formules

$$\varphi(\lambda) = (1 + i\lambda)^n \int_0^\tau e^{i\lambda t} c(t)\, dt,$$

où $c(t) \in \mathscr{L}^2[0, \tau]$. En y ajoutant toutes les fonctions $\varphi(\lambda) = (i\lambda)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on obtient de toute évidence l'espace $L_{[0, \tau]}(F)$.

La formule (2.1.3) permet de donner une description figurative des éléments de l'espace $H(T)$ pour $T = [0, \tau]$, enveloppe linéaire fermée des valeurs $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Si $\Phi(d\lambda)$ est une mesure spectrale stochastique du processus stationnaire $\xi(t)$, toute grandeur $\eta \in H(T)$ peut être représentée par l'intégrale $\eta = \int \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$ (voir chapitre I, § 6), où $\varphi(\lambda) \in L_T(F)$, et comme il est facile de le voir

$$\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \left[a_k \xi^{(k)}(0) + b_k \xi^{(k)}(\tau) + \int_0^\tau \xi^{(k)}(t)\, c_k(t)\, dt \right],$$

où a_k et b_k sont des coefficients réels, $c_k(t)$ des fonctions de carré intégrable, et $\xi^{(k)}(t)$ les dérivées existantes du processus, $k = 0, \ldots, n-1$.

Notons que si la densité spectrale $f(\lambda)$ ne satisfait qu'à la condition

$$f(\lambda) \geqslant c\,(1 + \lambda^2)^{-n},$$

l'espace correspondant $L_{[0,\tau]}(F)$ fait partie de l'espace $L_T(G)$ caractérisé par la densité spectrale $g(\lambda) = c(1+\lambda^2)^{-n}$, alors toute fonction $\varphi(\lambda) \in L_{[0,\tau]}(F)$ peut être représentée par la formule (2.1.3). Il faut noter également que cette formule pour tous les λ complexes donne une fonction analytique entière. Ultérieurement (voir § 4, chapitre III) nous montrerons que l'espace $L_{[0,\tau]}(F)$ peut être identifié à une classe de fonctions du type (2.1.3) non seulement sous la condition (2.1.2) mais également pour une condition plus faible, à savoir

$$f(\lambda) \asymp (1+\lambda^2)^{-n}, \quad \lambda \to \infty$$

(c'est-à-dire $f(\lambda) \asymp (1+\lambda^2)^{-n}$ seulement pour des λ suffisamment grands). Sous la condition (2.1.2) on peut facilement, à partir de la représentation (2.1.3), trouver la formule générale pour les fonctions $\varphi(\lambda)$ des espaces $L_{(-\infty,0]}(F)$ et $L_{[0,\infty)}(F)$. Plus précisément, toute fonction $\varphi(\lambda) \in L_{[0,\infty)}(F)$ est la limite d'une certaine suite de fonctions $\varphi_k(\lambda) \in L_{[0,\tau_k]}(F)$, $\tau_k \to \infty$, représentables sous la forme

$$\varphi_k(\lambda) = P_k(i\lambda) + (1+i\lambda)^n \int_0^\infty e^{i\lambda t} c_k(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où la suite $c_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, est fondamentale dans l'espace hilbertien $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ des fonctions de carré intégrable et dans cet espace converge vers une certaine fonction $c(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Il est évident que la fonction limite $\varphi(\lambda) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\lambda)$ peut être représentée sous la forme

$$\varphi(\lambda) = P(i\lambda) + (1+i\lambda)^n \int_0^\infty e^{i\lambda t} c(t)\,d(t),$$

où $P(i\lambda) = \lim P_k(i\lambda)$ est un polynôme de degré non supérieur à $n-1$. Il est également évident que chacune de ces fonctions, où $c(t) \in \mathcal{L}^2(0,\infty)$, fait partie de l'espace $L_{[0,\infty)}(F)$.

D'une manière analogue l'espace $L_{(-\infty,0]}(F)$ s'identifie à la classe des fonctions données par la formule

$$\varphi(\lambda) = P(i\lambda) + (1+i\lambda)^n \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} c(t)\,d(t).$$

Nous allons étudier plus loin la structure des espaces $L_T(F)$, lorsque la densité spectrale $f(\lambda)$ ne satisfait pas obligatoirement à la condition (2.1.2), mais décroît tout de même à l'infini (et s'an-

nule également pour des λ finis) « pas trop rapidement », plus précisément quand

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

pour un temps discret t et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty$$

pour un temps continu t. En conservant les désignations adoptées passons aux espaces complexes $H(T)$ et $L_T(F)$.

2. Fonctions analytiques dans le cercle. Soit $\mathscr{H}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la classe des fonctions analytiques $\varphi(z)$ dans le cercle unité $|z| < 1$ pour lesquelles

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\lambda})|^p\, d\lambda < \infty, \qquad z = re^{i\lambda}.$$

Si $\varphi \in \mathscr{H}^p$, pour presque tous les $\lambda \in [-\pi, \pi]$ il existe les valeurs limites $\varphi(e^{i\lambda}) = \lim\limits_{r\to 1} \varphi(re^{i\lambda})$ et

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\lambda})|^p\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\lambda})|^p\, d\lambda.$$

L'espace $\mathscr{H}^p$ est un espace de Banach de norme $\|\varphi\|^{(p)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\lambda})|^p\, d\lambda\right)^{1/p}$. On peut l'identifier à un sous-espace fermé (dans l'espace donné*) $\mathscr{L}^p(-\pi, \pi)$) de toutes les fonctions $\varphi(e^{i\lambda}) \in \mathscr{L}^p(-\pi, \pi)$ pour lesquelles

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda})\, e^{in\lambda}\, d\lambda = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Nous désignerons également par $\mathscr{H}^p$ ce sous-espace formé par les valeurs limites des fonctions décrites ci-dessus et analytiques dans le cercle.

---

*) L'espace $\mathscr{L}^p(a, b)$ se compose des fonctions $\varphi(\lambda)$ sur le segment $a \leqslant \lambda \leqslant b$, pour lesquelles $\|\varphi\|^p = \left(\int_a^b |\varphi(\lambda)|^p\, d\lambda\right)^{1/p} < \infty$.

La fonction $\varphi(z)$ analytique à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ est appelée *fonction extérieure* si elle peut être représentée sous la forme

$$\varphi(z) = a \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\ln p(\lambda)\,d\lambda\right\}, \quad |a| = 1,$$

où la fonction réelle $p(\lambda)$ est non négative et $\ln p \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$.

La fonction $\varphi(z)$ analytique à l'intérieur du cercle est dite *intérieure* si $|\varphi(z)| \leqslant 1$ et $|\varphi(e^{i\lambda})| = 1$ pour presque tous les $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

On appelle *produit de Blaschke* une fonction analytique $B(z)$ de la forme

$$B(z) = az^p \prod\left[\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\,\frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}\right]^{p_n}, \qquad |a| = 1,$$

où $p, p_1, p_2, \ldots$ sont des nombres entiers non négatifs, $0 \leqslant |\alpha_n| < 1$, et le produit $\prod |\alpha_n|^{p_n}$ est convergent.

Théorème ([10], pages 98-99). *La fonction intérieure $\varphi(z)$ admet une seule représentation sous la forme d'un produit*

$$\varphi(z) = B(z)\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,\mu(d\lambda)\right\},$$

où $B(z)$ est la fonction de Blaschke, et $\mu(d\lambda)$ une mesure singulière.

Ce résultat permet facilement de montrer (voir [10], page 123) que toute famille non vide de fonctions intérieures possède le plus grand commun diviseur (intérieur).

Désignons par D la classe, introduite par V. Smirnov (voir [20]), des fonctions analytiques $\varphi(z)$ dans le cercle $|z| < 1$ admettant la représentation suivante:

$$\varphi(z) = B(z)\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,\mu(d\lambda)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\ln p(\lambda)\,d\lambda\right\}, \tag{2.1.4}$$

où $B(z)$ est le produit de Blaschke, $\mu(d\lambda)$ une mesure singulière et $p(\lambda) \geqslant 0$, $\ln p \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$. Ainsi, la classe D se compose de fonctions $\varphi(z)$ représentables sous la forme d'un produit d'une fonction intérieure (*partie intérieure de* φ) et d'une fonction extérieure (*partie extérieure de* φ).

Pour chaque fonction $\varphi(z)$ de la classe D on a, pour presque tous les λ, des valeurs limites $\varphi(e^{i\lambda}) = \lim\limits_{r\to 1}\varphi(re^{i\lambda})$, satisfaisant à la

condition $|\varphi(e^{i\lambda})| = p(\lambda)$, où $p(\lambda)$ est la fonction figurant dans la représentation (2.1.4) de $\varphi(z)$.

Théorème ([10], page 80). *Toute fonction* $\varphi \in \mathscr{H}^1$ *est le produit de deux fonctions de* $\mathscr{H}^2$.

Théorème ([10], page 81). *Pour* $f(\lambda) > 0$ *et* $f \in \mathscr{L}^1$ *on a* $f = |\varphi|^2$, $\varphi \in \mathscr{H}^2$, *si et seulement si* $\ln f \in \mathscr{L}^1$.

A cet effet il y a lieu de noter que l'on peut écrire

$$\varphi(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\ln f(\lambda)\,d\lambda\right\}.$$

Théorème de Beurling ([10], page 145). *Les fonctions* $\{z^n\varphi\}$, $n = 0, 1, \ldots$, *engendrent toute la classe* $\mathscr{H}^2$ *pour* $\varphi \in \mathscr{H}^2$ *si et seulement si* φ *est une fonction extérieure.*

Soit $\varphi(z)$ une fonction analytique dans le cercle. Dans ce cas la fonction $\varphi(1/z)$ est analytique à l'extérieur du cercle. En faisant correspondre, comme indiqué ci-dessus, à chaque fonction analytique à l'intérieur du cercle une fonction analytique à l'extérieur du cercle, on obtient les classes de fonctions D et $\mathscr{H}^p$ analytiques à l'extérieur du cercle. Pour distinguer ces classes les unes des autres, nous adoptons la désignation D^+, $\mathscr{H}^{p+}$ pour les classes à l'intérieur du cercle et D^-, $\mathscr{H}^{p-}$ à l'extérieur.

3. Fonctions analytiques dans le demi-plan. Désignons par $\tilde{\mathscr{H}}^p$, D les classes de fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur, images des classes $\mathscr{H}^p$, D dans le cercle lors d'une application conforme du cercle sur le demi-plan supérieur.

Désignons par $\mathscr{H}^p$ la classe des fonctions $\varphi(z)$ analytiques dans le demi-plan supérieur pour lesquelles

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p\,dx \leqslant M < \infty, \quad y \geqslant 0,$$

où M est une constante qui ne dépend pas de y ([10], [15]).

La fonction $\varphi \in D$ est dite *extérieure* si elle admet la représentation suivante:

$$\varphi(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda - z}\,\frac{\ln p(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right\},$$

où $p(\lambda)$ est une fonction réelle, $p(\lambda) \geqslant 0$, et $\frac{\ln p(\lambda)}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1(-\infty, \infty)$. Pour des fonctions extérieures l'inégalité pour l'intégrale de Poisson

$$\ln|\varphi(z)| \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\varphi(\lambda)|}{(\lambda-x)^2+y^2}\,d\lambda, \quad z = x+iy, \quad y > 0,$$

devient une égalité.

La fonction $\varphi \in D$ est dite *intérieure* si $|\varphi(z)| \leqslant 1$, $|\varphi(\lambda)| = 1$ $(z = \lambda + i\mu,\ \mu \geqslant 0)$.

Les fonctions de la classe D admettent les représentations de la forme (2.1.4):

$$\varphi(z) = e^{i\alpha z} B(z) \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z}\, \mu(d\lambda) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\lambda z}{\lambda - z} \frac{\ln p(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda \right\},$$

où α est un nombre réel, $B(z)$ la fonction de Blaschke, $\mu(d\lambda)$ une mesure singulière finie et $p(\lambda) \geqslant 0$, $\frac{\ln p(\lambda)}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1(-\infty, \infty)$.

D'une manière analogue, sont étendues aux classes D et $\mathscr{H}^p$ dans le demi-plan supérieur les autres assertions faites précédemment. En particulier, on a le théorème suivant.

Théorème de Lax ([10]). *Pour que les fonctions* $\{e^{i\lambda t}\varphi(\lambda),\ t \geqslant 0\}$ *engendrent tous les* $\mathscr{H}^2$ *pour* $\varphi \in \mathscr{H}^2$ *il faut et il suffit que* φ *soit une fonction extérieure.*

Nous utiliserons souvent dans la suite la propriété suivante des espaces $\mathscr{H}^2$.

Théorème de Paley-Wiener ([10], page 187). *La fonction* φ *appartient à* $\mathscr{H}^2$ *(dans le demi-plan supérieur) si et seulement si*

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{izt} c(t)\, dt, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0,$$

où $c(t) \in \mathscr{L}^2(0, \infty)$.

Pour éviter toute confusion quand à côté des classes D, $\mathscr{H}^p$ dans le demi-plan supérieur on considère les classes D, $\mathscr{H}^p$ du demi-plan inférieur, on adoptera la désignation D^+, $\mathscr{H}^{p+}$ pour les premières et D^-, $\mathscr{H}^{p-}$ pour les secondes. Notons que

$$\mathscr{L}^2(-\infty, \infty) = \mathscr{H}^{2+} \oplus \mathscr{H}^{2-}.$$

§ 2. Espaces $L^+(F)$ et $L^-(F)$

Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire stationnaire (dans le sens général) de mesure spectrale $F(d\lambda)$. Soit $F = F_a + F_s$, où F_a et F_s sont les composantes absolument continue et singulière de la mesure F. Posons $f(\lambda) = \frac{dF_a}{d\lambda}$ et considérons $f(\lambda)$ comme la densité spectrale, même si $F \neq F_a$. Introduisons les désignations

$$L = L(F) = L_{(-\infty, \infty)}(F),$$

$$L^- = L^-(F) = L_{(-\infty, 0]}(F) \quad \text{et} \quad L^+ = L^+(F) = L_{[0, \infty)}(F).$$

Théorème 1. *Si* $\xi(t)$ *est un processus aléatoire stationnaire à temps discret* $t=0, \pm 1, \ldots,$ *on a*

1) $L^+(F_s)=L^-(F_s)=L(F_s)$;

2) $L^+(F_a)=L^-(F_a)=L(F_a)$ *si et seulement si*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(\lambda)|\, d\lambda = \infty ;$$

3) *lorsque*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(\lambda)|\, d\lambda < \infty, \tag{2.2.1}$$

$f(\lambda)$ *peut s'écrire comme* $f(\lambda)=|g(e^{i\lambda})|^2$, *où* g *est une fonction extérieure de la classe* $\mathscr{H}^2$ *dans le cercle* $|z|<1$. *Dans ce cas on a*

$$L^-(F_a)=D^- \cap L(F_a) = \frac{1}{g}\, \mathscr{H}^{2-}, \qquad L^+(F_a)=D^+ \cap L(F_a) = \frac{1}{g}\, \mathscr{H}^{2+}.$$

Théorème 2. *Si* $\xi(t)$ *est un processus aléatoire stationnaire à temps continu* t, $-\infty < t < \infty$, *on a*

1) $L^+(F_s) = L^-(F_s) = L(F_s)$;

2) $L^+(F_a) = L^-(F_a) = L(F_a)$ *si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda = \infty ;$$

3) *lorsque*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty, \tag{2.2.2}$$

$f(\lambda)$ *peut s'écrire comme* $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$, *où* g *est maintenant une fonction extérieure de la classe* $\mathscr{H}^2$ *dans le demi-plan supérieur* $\operatorname{Im} z > 0$, $z = \lambda + i\mu$. *Dans ce cas on a*

$$L^-(F_a) = D^- \cap L(F_a), \qquad L^+(F_a) = D^+ \cap L(F_a).$$

Les assertions 1) à 3) des deux théorèmes sont en fait équivalentes aux théorèmes fondamentaux de A. Kolmogorov et M. Krein de la théorie du pronostic sur les processus aléatoires stationnaires *). Ces assertions jouant un rôle capital pour ce qui suit, nous allons en donner une brève démonstration.

Tout d'abord nous allons démontrer les points 1) à 3) du théorème 1. Soit F une mesure singulière sur le segment $[-\pi, \pi]$. Supposons que $L^- \neq L$; il s'ensuit que $e^{i\lambda} \notin L^-$. Désignons par $\varphi(\lambda)$ la

---

*) Voir, par exemple, [22].

projection de l'élément $e^{i\lambda}$ sur le sous-espace L^-. On a alors $e^{i\lambda} - \varphi(\lambda) \not\equiv 0$ et $e^{i\lambda} - \varphi(\lambda) \perp L^-$ de sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} (e^{i\lambda} - \varphi) F(d\lambda) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

La mesure généralisée $F_1(d\lambda) = (e^{i\lambda} - \varphi) F(d\lambda)$ est analytique, c'est-à-dire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} F_1(d\lambda) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

et en vertu du théorème de F. et M. Riesz ([10], page 73) cette mesure doit être absolument continue sur la mesure de Lebesgue. Mais ceci empêche que la mesure $F(d\lambda)$ soit singulière. La contradiction obtenue démontre le point 1).

Passons au point 2). Supposons que $\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(\lambda)| \, d\lambda = \infty$ et qu'en dépit du théorème $L^- \neq L$. On a de nouveau $e^{i\lambda} \notin L^-$, et si comme précédemment $\varphi(\lambda)$ est la projection de $e^{i\lambda}$ sur L^-, on a $\psi(\lambda) = e^{i\lambda} - \varphi(\lambda) \not\equiv 0$ et

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \psi(\lambda) f(\lambda) \, d\lambda = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.2.3}$$

Désignons par $\|\varphi\|^{(p)}$ la norme dans l'espace $\mathscr{L}^p(-\pi, \pi)$. Remarquons que l'on a $\psi f \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$. En effet, en vertu de l'inégalité de Bouniakovsky $\|\psi f\|^{(1)} \leqslant \|\psi\|_{F_a} \cdot (\|f\|^{(1)})^{1/2} < \infty$. Donc à partir de l'égalité (2.2.3) on a $\psi f \in \mathscr{H}^1$. Les logarithmes de chacune des fonctions de $\mathscr{H}^1$ étant sommables, on peut écrire

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |\psi(\lambda) f(\lambda)| \, d\lambda > -\infty.$$

L'inégalité triviale $\ln x < x$ entraîne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |\psi^2(\lambda) f(\lambda)| \, d\lambda \leqslant \|\psi\|_{F_a}^2 < \infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) \, d\lambda \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \, d\lambda < \infty.$$

Les trois dernières inégalités montrent que, contrairement à l'hypothèse faite au début, on a $\ln f \in \mathscr{L}^1$.

La contradiction obtenue démontre la première partie du point 2), la seconde partie se trouve dans les assertions du point 3) que nous allons démontrer tout de suite. En vertu de (2.2.1), $f(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme suivante $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$, où

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(\theta)|\,d\theta\right\}, \quad z = re^{i\lambda},$$

est une fonction extérieure de $\mathscr{H}^2$. Supposons que $\varphi(e^{i\lambda}) = \varphi \in L^+(F)$ ce qui signifie qu'il existe une suite de polynômes $P_n(z)$ tels que $\|\varphi - P_n\|_F \to 0$. Mais alors on a également

$$\|\varphi g - P_n g\|^{(2)} = \|\varphi - P_n\|_F \to 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Il est évident que $P_n g \in \mathscr{H}^{2+}$. Donc pour la fonction limite on a $\psi = \varphi g \in \mathscr{H}^{2+}$, c'est-à-dire $\varphi = \psi/g$, où ψ, $g \in \mathscr{H}^{2+}$. En faisant appel à la représentation canonique (2.1.4) des fonctions de $\mathscr{H}^{2+}$ et D^+ on voit que $\varphi \in D^+$.

Inversement, supposons que $\varphi \in D^+ \cap L(F)$. On a alors $\psi = \varphi g \in \mathscr{H}^{2+}$. La fonction g est extérieure et en vertu du théorème de Beurling (voir § 1) la famille des fonctions $\{gP\}$, où P parcourt tous les polynômes, est dense dans $\mathscr{H}^{2+}$. Ceci signifie en particulier que l'on peut trouver une suite de polynômes P_n pour laquelle pour $n \to \infty$ on a

$$\|\psi - gP_n\|_2 = \|(\varphi - P_n)g\|_2 = \|\varphi - P_n\|_F \to 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi \in L^+(F)$. Le cas de $L^-(F)$ s'étudie de la même manière.

La démonstration des points 1) à 3) du théorème 2 est analogue à celle des points correspondants du théorème 1. En effet, en utilisant l'application conforme du cercle dans le demi-plan on montre que le théorème généralisé de F. et M. Riesz est également vrai dans le cas présent (voir [20], page 209). Puis, si on a $\varphi \in \mathscr{H}^2$ dans le demi-plan supérieur, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|\varphi(\lambda)||}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty.$$

Enfin, pour démontrer le point 3) il y a lieu de se référer au théorème de Lax au lieu du théorème de Beurling.

Remarquons que lors de la démonstration du point 3) des deux théorèmes on a obtenu les égalités suivantes :

si les conditions (2.2.1) *ou* (2.2.2) *se trouvent remplies on a*

$$L^+ = \frac{1}{g}\mathscr{H}^{2+}, \quad L^- = \frac{1}{\bar{g}}\mathscr{H}^{2-}. \tag{2.2.4}$$

§ 3. Structure des espaces $L_T(F)$ lorsque T est un intervalle fini

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié les espaces $L_T(F)$ (et donc les espaces $H(T)$ engendrés par les valeurs du processus stationnaire correspondant $\xi(t)$, $t \in T$, de densité spectrale $F(d\lambda)$) dans le cas où T est un intervalle infini. Dans le présent paragraphe on étudiera le cas d'un intervalle fini $T = [a, b]$.

Le cas du temps discret étant trivial — $L_T(F)$ est constitué de polynômes trigonométriques de la forme $\sum\limits_{a \leqslant t \leqslant b} a_t e^{i\lambda t}$ — nous ne traiterons que des processus à temps continu. De plus nous nous limiterons à l'étude des processus $\xi(t)$ dont la mesure spectrale $F(d\lambda)$ est absolument continue et la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfait à la condition (2.2.2).

Comme nous l'avons déjà noté, il suffit d'envisager des intervalles de la forme $T = [-a, a]$. Posons

$$L^{\sigma}(F) = \bigcap_{T=[-a,\, a],\ a>\sigma} L_T(F)$$

et

$$L^0(F) = \bigcap_T L_T(F).$$

L'espace $L^0(F)$ se trouve déterminé par le comportement du processus $\xi(t)$ au voisinage immédiat du zéro; l'espace qui lui est isométrique $H^0 = \bigcap\limits_T H_T$ contient en particulier toutes les dérivées $\xi^{(k)}(0)$ existantes.

Nous convenons de désigner par D_σ la famille des fonctions analytiques entières $\varphi(z)$, $z = \lambda + i\mu$, de degré fini $\leqslant \sigma$, c'est-à-dire des fonctions entières pour lesquelles

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\, R^{-1} \max_{\theta} \ln |\varphi(Re^{i\theta})| \leqslant \sigma$$

(en particulier, D_0 désigne la famille des fonctions entières de degré zéro).

T h é o r è m e 3. *Si la densité spectrale $f(\lambda)$ du processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$ satisfait à la condition* (2.2.2) *on a* *)

$$L^{\sigma}(F) = D_\sigma \cap L(F), \qquad L^0(F) = D_0 \cap L(F). \qquad (2.3.1)$$

D é m o n s t r a t i o n. Il y a lieu de démontrer les deux inclusions suivantes:

$$L^{\sigma}(F) \subset D_\sigma \cap L(F) \text{ et } L^{\sigma}(F) \supset D_\sigma \cap L(F).$$

---

*) Nous ne distinguons pas les fonctions de D_σ de leur restriction sur la droite réelle $\mu = 0$.

Nous démontrerons la première pour tous les $\sigma \geqslant 0$ et la seconde seulement pour $\sigma = 0$ *).

1. Démonstration de l'inclusion $L^\sigma(F) \subset D_\sigma \cap L(F)$. Supposons que $\varphi \in L^\sigma(F)$. Il existe des fonctions

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_j a_{jn} \exp\{it_{jn}\lambda\}, \quad |t_{jn}| \leqslant \sigma + 1/n,$$

telles que $\|\varphi - \varphi_n\|_F < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Il est évident que toutes les $\varphi_n \in D_{\sigma+1/n}$.

Nous allons montrer qu'en tout point du plan complexe on a

$$|\varphi_n(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \tag{2.3.2}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, les constantes C_ε ne dépendant que de ε (et non de n).

La famille de fonctions analytiques φ_n uniformément bornée est compacte. De plus, $\|\varphi_n - \varphi\|_F \to 0$, donc $\varphi_n(z)$ converge vers la fonction entière $\varphi(z)$ qui, sous la condition (2.3.2), est une fonction de degré fini non supérieur à σ. Il est évident que la restriction de $\varphi(z)$ sur $\operatorname{Im} z = 0$ coïncide avec $\varphi(\lambda)$.

Il reste ainsi à démontrer l'inégalité (2.3.2). A cet effet nous allons estimer $|\varphi_n(z)|$ sur les bissectrices des angles de coordonnées et utiliser le principe de Phragmén-Lindelöf **).

Estimons tout d'abord $|\varphi_n(z)|$ pour $|\mu| \geqslant 1$.

Notons qu'en vertu de (2.2.2) $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$, où $g(z)$ est une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^2$. Introduisons les fonctions $\psi_n(z) = \varphi_n g \exp\{iz(\sigma + \delta)\}$, $0 < \delta \leqslant \frac{1}{n}$. De toute évidence on a $\psi_n \in \mathscr{H}^2$ et, par conséquent, pour tous les $\mu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\lambda + i\mu)|^2 d\mu \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\lambda)|^2 d\lambda =$$

$$= \|\varphi_n\|_F^2 \leqslant \left(\|\varphi\|_F + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant (\|\varphi\|_F + 1)^2 = C_1. \tag{2.3.3}$$

---

*) La démonstration du cas général ($\sigma > 0$) bien que reprenant les raisonnements analogues est beaucoup plus compliquée; le lecteur intéressé peut se référer à l'article de N. Levinson et H. P. McKean, Jr., *Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary gaussian noise*, Acta Math. **112**, n°s 1-2 (1964), 99-143. Un résultat plus fort a été obtenu par M. Krein qui a donné une représentation intégrale des fonctions entières de $L^\sigma(F)$ (voir l'article « *Sur le problème fondamental d'approximation de la théorie de l'extrapolation des processus aléatoires stationnaires* », en russe. Doklady Akademii Nauk SSSR 94 (1954), 13-16).

Les autres résultats de ce paragraphe sont également empruntés à l'article cité de Levinson et McKean, leur démonstration ayant été quelque peu changée.

**) Voir, par exemple, [18].

Ensuite, la fonction $g \in \mathcal{H}^2$ admet la représentation suivante en vertu du théorème de Paley-Wiener

$$g(z) = \int_0^\infty e^{iuz} \hat{g}(u)\, du, \quad z = \lambda + i\mu, \quad \mu > 0,$$

où $\hat{g}(u)$ est la transformée de Fourier de la fonction $g(\lambda)$. Donc pour tous les $\mu > 0$ on a

$$|g(\lambda + i\mu)| \leqslant \left(\int_0^\infty |\hat{g}(u)|^2\, du\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2\mu u}\, du\right)^{1/2} = \frac{C_2}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.3.4)$$

Désignons par Γ_R le contour formé par le segment de droite $|\lambda| \leqslant R$, $\mu = 1/2$ et l'arc sous-tendu de cercle de rayon R de centre au point $z = i/2$, Re $z \geqslant 1/2$. En vertu du théorème de Cauchy, si Re $z_0 \geqslant 1/2$ et le rayon R est suffisamment grand, on a

$$\psi_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\psi_n(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Il est facile de démontrer à partir de la relation (2.3.4) que l'intégrale sur la demi-circonférence Γ_R de $\frac{\psi(z)}{z - z_0}$ tend vers zéro pour $R \to \infty$. Par conséquent, quel que soit $\mu \geqslant 1$, en vertu des inégalités (2.3.3), on a

$$|\psi_n(\lambda + i\mu)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\psi_n\left(u + \frac{i}{2}\right)\right|}{\left|(u - \lambda) + i\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\right|}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_n\left(u + \frac{i}{2}\right)\right|^2 du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{1}{4}}\right)^{1/2} = C_3. \quad (2.3.5)$$

Puis, en écrivant $\ln|g(z)|$ sous la forme d'une intégrale de Poisson (g étant une fonction extérieure, voir § 1), soit

$$\ln|g(z)| = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|g(u)|}{(u - \lambda)^2 + \mu^2}\, du, \quad z = \lambda + i\mu,$$

on trouve que si $z = Re^{i\theta}$, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, pour $R \to \infty$ on a

$$\frac{\ln|g(z)|}{|z|} \to 0. \quad (2.3.6)$$

En effet, pour $T>0$ donné et $z=Re^{i\theta}$

$$\frac{\mu}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\ln|g(u)|}{(u-\lambda)^2+\mu^2}\,du=O\left(\frac{1}{\mu}\right)=O\left(\frac{1}{R}\right)\to 0.$$

On a de plus

$$\frac{\mu}{\pi}\left|\int_{|u|>T}\frac{\ln|g(u)|}{(u-\lambda)^2+\mu^2}\,du\right|\leqslant\frac{\mu^2+\lambda^2+1}{2\pi\mu}\int_{|u|>T}\frac{|\ln f(u)|}{1+u^2}\,du=$$
$$=\frac{R}{\pi\sqrt{2}}\,\frac{R^2+1}{R^2}\int_{|u|>T}\frac{|\ln f(u)|}{1+u^2}\,du=R\cdot o(1),\quad T\to\infty.$$

Les deux dernières formules démontrent (2.3.6).

En vertu de (2.3.6) pour $\varepsilon>0$ quelconque et $z=Re^{i\theta}$ ($\theta=\pi/4$, $3\pi/4$; $R\geqslant 1$) on a l'inégalité $|g(z)|\geqslant C_4e^{-\varepsilon|z|}$, où la constante C_4 peut dépendre de ε. Compte tenu de (2.3.5) on aura sur les rayons $z=Re^{i\theta}$ ($\theta=\pi/4$, $3\pi/4$; $R\geqslant 1$) l'estimation suivante:

$$|\varphi_n(z)|\leqslant C_5e^{(\sigma+\varepsilon+\delta)|z|}. \tag{2.3.7}$$

D'une manière analogue, en introduisant la fonction $\psi_n^-(z)=$ $=\varphi_n\bar{g}\exp\{-iz(\sigma+\delta)\}$, où pour z du demi-plan inférieur $\bar{g}(z)=$ $=\overline{g(\bar{z})}\in\mathscr{H}^{2-}$, on obtient sur les rayons $z=Re^{i\theta}$, $\theta=5\pi/4$, $7\pi/4$, $R\geqslant 1$, l'estimation suivante:

$$|\varphi_n(z)|\geqslant C_5e^{(\sigma+\varepsilon+\delta)|z|}. \tag{2.3.8}$$

Nous allons passermaint enant à l'estimation de $|\varphi_n(z)|$ sur les segments de bissectrices se trouvant à l'intérieur du cercle $|z|\leqslant$ $\leqslant 1$. Comme d'habitude, on a $\ln^+a=\ln a$ si $a>1$ et $\ln^+a=0$ si $a\leqslant 1$. En estimant la fonction subharmonique $\ln|\varphi_n(z)|$ à l'aide d'une intégrale de Poisson on aura sur les droites $|\operatorname{Im} z|=1$

$$\ln|\varphi_n(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\varphi_n(u)|}{(u-\lambda)^2+1}\,du\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\sup_u\frac{u^2+1}{(u-\lambda)^2+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|\varphi_n(u)|}{u^2+1}\,du\leqslant\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda^2+2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|\varphi_n(u)|}{u^2+1}\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda^2+2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+\dfrac{|\varphi_n(u)|\,|g(u)|}{|g(u)|}}{1+u^2}\,du\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda^2+2}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|\varphi_n(u)g(u)||}{1+u^2}\,du+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|g(u)||}{1+u}\,du\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_6(\lambda^2+2)\left(\|\varphi_n\|_F+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln f(u)|}{1+u^2}\,du\right)\leqslant C_7(\lambda^2+2).$$

Ainsi, la fonction $e^{-C_7z^2}\varphi_n(z)$, analytique dans la bande $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$, est bornée dans cette bande et sur ses bornes satisfait à l'inégalité $|e^{-C_7z^2}\varphi_n(z)| \leqslant C_8$, où C_8 ne dépend pas de n. En vertu du principe de Phragmén-Lindelöf la dernière inégalité se trouve vérifiée en tous les points de la bande mentionnée. En particulier, toutes les fonctions $\varphi_n(z)$ sont uniformément bornées dans le cercle $|z| \leqslant 1$. D'où et en vertu de (2.3.7), (2.3.8) on obtient (2.3.2) qui, comme nous l'avons déjà signalé, démontre la première partie du théorème.

2. Démonstration de l'inclusion $L^0(F) \supset D_0 \cap L(F)$. Supposons que $\varphi(\lambda) \in D_0 \cap L(F)$. La formule d'Adamar *) permet de représenter la fonction $\varphi(\lambda)$ qui est entière de degré nul comme le produit

$$\varphi(z) = z^m e^b \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}, \quad \sum \frac{1}{|z_n|^2} < \infty, \qquad (2.3.9)$$

où $z_n \neq 0$ sont les zéros de $\varphi(z)$. La fonction $\varphi(z)$ peut s'écrire également comme la somme $\varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, où $\varphi_1(z) = \frac{1}{2}[\varphi(z) + \varphi(-z)]$ et $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}[\varphi(z) - \varphi(-z)]$ sont respectivement des fonctions paire et impaire. Tout comme précédemment on a $\varphi_1, \varphi_2 \in D_0 \cap L(F)$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour des fonctions paires et impaires. La démonstration étant analogue dans les deux cas, nous envisagerons le cas des fonctions paires.

Il y a lieu de démontrer que quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver une fonction $\varphi_\varepsilon \in L^\varepsilon(F)$ telle que $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_F \leqslant \varepsilon$.

Notons tout d'abord que toute fonction $\varphi(\lambda)$ entière de degré fini $\leqslant\varepsilon$ de carré sommable appartient à $L^\varepsilon(F)$. En effet, chacune de ces fonctions appartient à $L(F)$ et en vertu du théorème de Paley-Wiener **) sur les fonctions entières de $\mathcal{L}^2$ la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ de φ est nulle à l'extérieur de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ de sorte que

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\lambda u}\hat{\varphi}(u)\,du$$

et, évidemment, $\varphi \in L^\varepsilon(F)$.

Ainsi il suffit de construire une fonction entière de degré $\leqslant\varepsilon$ de carré sommable donnant une bonne approximation de φ. Notons que pour une fonction φ paire, la factorisation d'Adamar (2.3.9) sera

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2m} \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda^2}{z_n^2}\right), \quad m \geqslant 0.$$

*) Voir, par exemple, [18], page 525.
**) Voir, par exemple, [10], page 82.

Nous allons définir la fonction $\varphi_\varepsilon(\lambda)$ par l'égalité

$$\varphi_\varepsilon(\lambda)=\lambda^{2m}\prod_{|z_n|<d}\left(1-\frac{\lambda^2}{z_n^2}\right)\prod_{n>d\delta}\left(1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right),$$

où $\delta=\frac{\varepsilon}{\pi}$ et le nombre $d=d(\varepsilon)$ sera précisé ultérieurement.

Montrons que φ_ε est une fonction entière de carré sommable de degré $\leqslant\varepsilon$ (donc $\varphi_\varepsilon\in L^2(F)$). La formule d'Euler

$$\sin\pi\lambda=\pi\lambda\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$

permet d'écrire φ_ε sous la forme

$$\varphi_\varepsilon(\lambda)=\frac{\sin\pi\delta\lambda}{\pi\delta}\,\frac{\lambda^{2m-1}\prod\limits_{|z_n|<d}\left(1-\frac{\lambda^2}{z_n^2}\right)}{\prod\limits_{n\leqslant d\delta}\left(1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right)},\qquad(2.3.10)$$

de sorte que $\varphi_\varepsilon(\lambda)$ est une fonction entière de degré $\pi\delta=\varepsilon$. Estimons maintenant le rapport des polynômes du second membre de (2.3.10) pour des λ grands. Introduisons la fonction $N_\varphi(R)$ monotone non décroissante égale au nombre de racines de la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle $|z|\leqslant R$. La fonction $N_\varphi(R)$ est étroitement liée à la croissance de la fonction $\varphi(z)$. En particulier, pour une fonction de degré zéro, on a $N_\varphi(R)=o(R)$, $R\to\infty$ *). Par conséquent, le degré du polynôme dans le numérateur de l'expression (2.3.10) est $o(d)$, alors que celui du dénominateur est $\sim 2\,d\delta$ et $\varphi_\varepsilon\in\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$ pour des d suffisamment grands.

Il ne nous reste plus qu'à estimer $\|\varphi_\varepsilon-\varphi\|_F$. A cet effet nous allons démontrer le lemme suivant caractérisant le rapprochement de φ_ε et de φ.

Lemme 1. *Pour $\varepsilon>0$, $A<\infty$ donnés on peut trouver un nombre d_0 tel que pour tous les $d\geqslant d_0$ on ait les inégalités suivantes:*

$$\left.\begin{aligned}&\max_{|\lambda|\leqslant A}|\varphi(\lambda)-\varphi_\varepsilon(\lambda)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\int_{-A}^{A}f(\lambda)\,d\lambda\right)^{-1/2},\\&\max_{A\leqslant|\lambda|\leqslant\frac{d}{2}}\left|\frac{\varphi_\varepsilon(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right|\leqslant1,\quad\max_{|\lambda|\geqslant\frac{d}{2}}|\varphi(\lambda)|\leqslant1.\end{aligned}\right\}\qquad(2.3.11)$$

La première des inégalités (2.3.11) est évidente. Pour démontrer la seconde servons-nous de l'inégalité élémentaire

$$e^{-2x}\leqslant1-x\leqslant e^{-x},\qquad 0\leqslant x<\frac{1}{4},$$

*) Voir [18], page 521.

et écrivons

$$\left|\frac{\varphi_\varepsilon}{\varphi}\right| = \frac{\prod\limits_{n>d\delta}\left(1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right)}{\prod\limits_{|z_n|\geqslant d}\left|1-\frac{\lambda^2}{z_n^2}\right|} \leqslant \frac{\prod\limits_{n>d\delta}\left|1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right|}{\prod\limits_{|z_n|\geqslant d}\left(1-\frac{\lambda^2}{|z_n|^2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\lambda^2\delta^2\sum_{n>d\delta}\frac{1}{n^2}\right\}\exp\left\{2\lambda^2\sum_{|z_n|\geqslant d}\frac{1}{|z_n|^2}\right\}. \qquad (2.3.12)$$

Pour estimer le premier facteur dans (2.3.12) notons que

$$\sum_{n>d\delta}\frac{1}{n^2} \geqslant \int\limits_{d\delta+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{d\delta+1}.$$

Pour estimer $\sum\limits_{|z_n|\geqslant d}\frac{1}{|z_n|^2}$ nous allons de nouveau faire appel à la fonction $N_\varphi(R)$ de répartition des zéros. Se souvenant que $N_\varphi(R) = o(R)$, on obtient

$$\sum_{|z_n|\geqslant d}\frac{1}{|z_n|^2} = \int\limits_d^\infty\frac{dN_\varphi(R)}{R^2} = -\frac{N_\varphi(d)}{d^2} + 2\int\limits_d^\infty\frac{N_\varphi(R)}{R^3}\,dR \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{R\geqslant d}\frac{N_\varphi(R)}{R}\int\limits_d^\infty\frac{dR}{R^2} = \frac{2}{d}\sup_{R\geqslant d}\frac{N_\varphi(R)}{R} \leqslant \frac{\delta}{2d},$$

si d est choisi suffisamment grand. En substituant les estimations obtenues dans (2.3.12) on obtient

$$\max_{|\lambda|\leqslant d/2}\left|\frac{\varphi_\varepsilon(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right| \leqslant \max_{|\lambda|\leqslant d/2}\exp\left\{-\lambda^2\left(\frac{\delta^2}{d\delta+1}-\frac{\delta}{2d}\right)\right\} = 1,$$

pour $d \geqslant 1/\delta$. La seconde des inégalités (2.3.11) se trouve ainsi démontrée.

Passons à la démonstration de la dernière inégalité du lemme. On a maintenant $|\lambda| \geqslant d/2$. L'estimation du second facteur dans l'expression de φ_ε donne

$$\ln\left(\prod_{|z_n|<d}\left|1-\frac{\lambda^2}{z_n^2}\right|\right) = \sum_{|z_n|<d}\ln\left|1-\frac{\lambda^2}{z_n^2}\right| =$$

$$= \int\limits_0^d \ln\left|1-\frac{\lambda^2}{R^2}\right| dN_\varphi(R) \leqslant \int\limits_0^d \ln\left(1+\frac{\lambda^2}{R^2}\right) dN_\varphi(R) =$$

$$= N_\varphi(d)\ln\left(1+\frac{\lambda^2}{d^2}\right) + \int\limits_0^d \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+R^2}\frac{N_\varphi(R)}{R}\,dR \leqslant$$

$$\leqslant 2N(d)\ln\frac{5|\lambda|}{d}+2\int_0^d \frac{N_\varphi(R)}{R}\,dR=$$

$$=o(d\ln d)+o\left(d\ln\frac{5|\lambda|}{d}\right). \qquad (2.3.13)$$

Pour estimer le dernier facteur de la formule de φ_ε nous allons envisager séparément les cas $\frac{d}{2}\leqslant|\lambda|\leqslant d$ et $|\lambda|>d$. Si $\lambda\leqslant d$ on a

$$\prod_{n>d\delta}\left(1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right)\leqslant\exp\left\{-\lambda^2\delta^2\sum_{n>d\delta}\frac{1}{n^2}\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\lambda^2\delta^2}{d\delta+1}\right\}\leqslant e^{-\frac{\lambda\delta}{2}},$$

si seulement $d\delta\geqslant 1$. Quand $|\lambda|>d$ on utilise de nouveau le développement d'Euler pour obtenir

$$\prod_{n>d\delta}\left|1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right|=\frac{\sin\pi\delta\lambda}{\pi\delta\lambda\prod\limits_{n<d\delta}\left|1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right|}.$$

Pour $n<\frac{d\delta}{\sqrt{2}}$ on aura $\left|1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right|>\frac{\lambda^2\delta^2}{2n^2}$, alors compte tenu de la formule de Stirling pour $n!$ on trouve

$$\prod_{n>d\delta}\left|1-\frac{\lambda^2\delta^2}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{\pi\delta}\exp\left\{-d\delta\sqrt{2}\ln\frac{|\lambda|\delta}{\sqrt{2}}+\right.$$

$$\left.+d\delta\sqrt{2}\ln\frac{d\delta}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\pi\delta}\exp\left\{-d\delta\sqrt{2}\ln\frac{|\lambda|}{d}\right\}.$$

En comparant les estimations obtenues avec (2.3.13) on voit que si d est suffisamment grand et $|\lambda|\geqslant d/2$, on a $|\varphi_\varepsilon(\lambda)|\leqslant 1$. Le lemme est démontré.

Ce lemme permet immédiatement d'obtenir l'estimation de $\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_F$. Compte tenu de (2.3.11) on obtient

$$\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_F^2\leqslant\int_{-A}^{A}|\varphi(\lambda)-\varphi_\varepsilon(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+5\int_{|\lambda|\geqslant A}|\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda+2\int_{|\lambda|>d/2}f(\lambda)\,d\lambda<\varepsilon^2,$$

si seulement A et d sont suffisamment grands. Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

§ 4. Projection de $L^+(F)$ sur $L^-(F)$

L'importance du rôle joué dans la théorie du pronostic par les projections des espaces $L_T(F)$, $T=[a, \infty)$, $a \geqslant 0$, sur l'espace $L^-(F)$ est bien connue *). Ces projections apparaissent lors de l'étude de différentes conditions de régularité des processus aléatoires (voir chapitre IV). Nous allons démontrer ici un certain nombre de théorèmes concernant la structure de l'espace $L^{+|-}(F)$, projection de $L^+(F)$ sur $L^-(F)$.

En vertu des théorèmes 1, 2, il suffit d'envisager des processus aléatoires dont la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfait à la condition (2.2.1) (pour les processus à temps discret) ou (2.2.2) (pour les processus à temps continu). Notons que dans ce cas la densité spectrale peut être factorisée :

$$f(\lambda)=|g(e^{i\lambda})|^2=g(e^{i\lambda})\cdot\bar{g}(e^{i\lambda})$$

(le temps t étant discret), où $g(z)$ est une fonction de la classe $\mathscr{H}^{2+}$, $|z|<1$, et $\bar{g}(z)=\overline{g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $|z|>1$, une fonction de la classe $\mathscr{H}^{2-}$. D'une manière analogue, pour les processus à temps continu on obtient

$$f(\lambda)=|g(\lambda)|^2=g(\lambda)\cdot\bar{g}(\lambda),$$

$$g\in\mathscr{H}^{2+},\quad \operatorname{Im} z>0;\quad \bar{g}(z)=\overline{g(\bar{z})},\quad \operatorname{Im} z<0,\quad \bar{g}\in\mathscr{H}^{2-}.$$

Les inclusions suivantes

$$L^-(F)\supseteq L^{+|-}(F)\supseteq L^-(F)\cap L^+(F)\supseteq L^0(F). \tag{2.4.1}$$

sont évidentes.

Nous nous proposons ici de trouver les conditions pour lesquelles les inclusions mentionnées deviennent des égalités.

Nous allons commencer par la description de la forme analytique des opérateurs $\mathscr{P}^-$ (noté aussi $\mathscr{P}$) et $\mathscr{P}^+$ projetant $L_T(F)$ sur $L^-(F)$ et $L^+(F)$ respectivement. Nous désignons par π^- (π) et π^+ les opérateurs de projection dans $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ $(\mathscr{L}^2(-\pi, \pi))$ sur $\mathscr{H}^{2-}$ et $\mathscr{H}^{2+}$ respectivement. On définit ces opérateurs comme suit : soient $\varphi\in\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ et

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u}\hat{\varphi}(u)\,du,\quad \text{où}\quad \hat{\varphi}\in\mathscr{L}^2(-\infty, \infty),$$

on a alors

$$\pi^-\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda u}\hat{\varphi}(u)\,du,\qquad \pi^+\varphi(\lambda)=\int_{0}^{\infty} e^{i\lambda u}\varphi(u)\,du.$$

*) Voir, par exemple, [22].

D'une manière analogue si $\varphi \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, $\varphi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda j} a_j$ avec $\sum |a_j|^2 < \infty$, on a

$$\pi^- \varphi = \sum_{-\infty}^{-1} e^{i\lambda j} a_j, \quad \pi^+ \varphi = \sum_{0}^{\infty} e^{i\lambda j} a_j.$$

Lemme 2. *Les relations suivantes se trouvent vérifiées*

$$\mathcal{P}^- \varphi(\lambda) = \overline{g}^{-1}(\lambda)\, \pi^- \overline{g}(\lambda)\, \varphi(\lambda), \qquad \mathcal{P}^+ = g^{-1} \pi^+ g.$$

Démonstration. Nous allons nous limiter au cas de $\mathcal{P}^- = \mathcal{P}$. Supposons également que le temps est continu (le cas du temps discret se démontre d'une manière analogue). Il y a lieu de démontrer que

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}, \ \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} L(F) \subseteq L^-(F), \quad \mathcal{P} L^-(F) = L^-(F).$$

Les deux premières égalités signifient que $\mathcal{P}$ est un projecteur*), les deux autres que $\mathcal{P}$ est le projecteur sur $L^-(F)$. Comme π est un projecteur, on a $\pi^* = \pi$, $\pi^2 = \pi$. Donc

$$\langle \mathcal{P}\varphi, \psi \rangle_F = (\pi(\overline{g}\varphi), \overline{g}\psi)_2 = (\overline{g}\varphi, \pi(\overline{g}\psi))_2 =$$
$$= (g\overline{g}\varphi, \overline{g}^{-1}\pi\overline{g}\psi)_2 = \langle \varphi, \mathcal{P}\psi \rangle_F.$$

L'égalité $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ découle de toute évidence de la relation $\pi^2 = \pi$.

Dans le § 2 nous avons montré que $\varphi \in L^-(F)$ entraîne $\overline{g}\varphi \in \mathcal{H}^{2-}$ et $\psi \in \mathcal{H}^{2-}$ entraîne $\psi \overline{g}^{-1} \in L^-(F)$. Comme $\pi(\overline{g}\varphi) \in \mathcal{H}^{2-}$, on a $\mathcal{P}\varphi = \overline{g}^{-1}\pi\overline{g}\varphi \in L^-(F)$. Si enfin $\varphi \in L^-(F)$ on a

$$\mathcal{P}\varphi = \overline{g}^{-1}\pi(\overline{g}\varphi) = \overline{g}^{-1}\overline{g}\varphi = \varphi.$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Théorème 4. *Pour que $L^-(F) \neq L^{+|-}(F)$ il faut et il suffit que $\theta = g/\overline{g}$ coïncide avec le rapport de deux fonctions intérieures; pour que $L^{+|-}(F) = L^-(F) \cap L^+(F)$ il faut et il suffit que $\theta = g/\overline{g}$ soit une fonction intérieure.*

Démonstration. La démonstration étant analogue pour les processus à temps discret et pour ceux à temps continu, nous allons donner la démonstration de la première partie pour un temps discret et de la seconde pour un temps continu.

Supposons que $\theta = s_1(e^{i\lambda})/s_2(e^{i\lambda})$, où $s_1(z)$, $s_2(z)$ sont des fonctions intérieures, de sorte que $|s_1(e^{i\lambda})| = |s_2(e^{i\lambda})| \equiv 1$. Nous allons supposer que $s_1(0) = s_2(0) = 0$; dans le cas contraire il serait possible sans changer θ de remplacer s_1, s_2 par zs_1, zs_2. Considérons la fonction $\varphi = \overline{g}^{-1}(s_1\overline{g})$ et montrons que $\varphi \in L^-(F)$ mais

*) Voir, par exemple, [2], page 111.

$\varphi \perp L^{+|-}(F)$ (de toute évidence $\varphi \neq 0$), de sorte que $L^- \neq L^{+|-}$. Il est clair que $\overline{s_1 g} \in \mathcal{H}^{2-}$, donc $\varphi \in L^-$. On peut finalement écrire φ sous la forme suivante :

$$\varphi = \frac{1}{g}\frac{g}{\bar{g}}(\bar{s}_1\bar{g}) = \frac{1}{g}\frac{|s_1|^2}{s_2}\bar{g} = \frac{1}{g}(\bar{s}_2\bar{g}),$$

et comme $s_2(0) = 0$, $\varphi g \in e^{-i\lambda}\mathcal{H}^{2-}$. Soit maintenant ψ un élément arbitraire de $L^+(F)$. On a

$$\langle \varphi, \mathcal{F}\psi\rangle_F = (\varphi\bar{g}, \pi(\bar{g}\psi))_2 = (\pi(\varphi\bar{g}), \bar{g}\psi)_2 = (\varphi\bar{g}, \bar{g}\psi)_2 = (\varphi g, \psi g)_2 = 0,$$

car $\varphi g \in e^{-i\lambda}\mathcal{H}^{2-}$, $\psi g \in \mathcal{H}^{2+}$.

Inversement, supposons que $L^- \neq L^{+|-}$ et que $\varphi \in L^-$ mais $\varphi \perp L^{+|-}$. Ecrivons la fonction φ sous la forme $\bar{\varphi}_1/\bar{g}$, $\varphi_1 \in \mathcal{H}^{2+}$. La fonction $\varphi_1 \in \mathcal{H}^2$ peut s'écrire sous la forme d'un produit $\varphi_1 = \theta_1\gamma_1$, où θ_1 est une fonction intérieure, et $\gamma_1 \in \mathcal{H}^2$ une fonction extérieure (voir § 1). Remarquons maintenant que la fonction φg est orthogonale à $\mathcal{H}^{2+}$ dans $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. En effet, si $\psi \in \mathcal{H}^{2+}$, on a

$$(\varphi g, \psi)_2 = \left(\varphi\bar{g}, \frac{g}{\bar{g}}\psi\right)_2 = \left(\pi(\varphi\bar{g}), \frac{g}{\bar{g}}\psi\right)_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{g}}\pi\bar{g}\varphi, \frac{\psi}{g}|g|^2\right)_2 = \left\langle \mathcal{F}\varphi, \frac{\psi}{g}\right\rangle_F = \left\langle \varphi, \mathcal{F}\frac{\psi}{g}\right\rangle_F = 0,$$

de sorte que $\frac{\psi}{g} \in L^+(F)$. Donc $\varphi g \in \mathcal{H}^{2-}$ et par conséquent $\varphi g = \bar{\theta}_2 \cdot \bar{\gamma}_2$, où θ_2, γ_2 sont respectivement des fonctions intérieure et extérieure. Ainsi

$$\varphi g = \frac{g}{\bar{g}}\bar{\varphi}_1 = \frac{g}{\bar{g}}\bar{\theta}_1\bar{\gamma}_1 = \bar{\theta}_2\bar{\gamma}_2.$$

Comme $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$ (θ_1, θ_2 étant intérieures) on a $|\gamma_1| = |\gamma_2|$. Les fonctions extérieures $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ qui sont de même module sur $|z| = 1$ sont égales entre elles, de sorte que

$$\frac{g}{\bar{g}} = \frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

La première partie du théorème se trouve donc démontrée.

Passons maintenant à la démonstration de la seconde partie. Remarquons d'abord qu'en vertu des hypothèses faites précédemment, $L^-(F) \neq L(F)$ et donc $L^-(F) \neq L^-(F) \cap L^+(F)$. C'est pourquoi en vertu de ce qui a été démontré ci-dessus, lorsque l'on étudie les conditions pour lesquelles on a l'égalité $L^- \cap L^+ = L^{+|-}$, on peut poser $\theta = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, où θ_1, θ_2 sont des fonctions intérieures sans diviseur commun.

La démonstration est basée sur l'égalité suivante:

$$L^{+|-}(F) = L^-(F) \cap \frac{1}{\theta_2} L^+(F), \tag{2.4.2}$$

entraînant immédiatement $L^{+|-} = L^- \cap L^+$ si et seulement si $\theta_2 \equiv 1$, c'est-à-dire quand $\theta = \theta_1/\theta_2 \equiv \theta_1$ est une fonction intérieure.

Pour démontrer (2.4.2) nous allons envisager le complément orthogonal M de l'espace $L^{+|-}$ jusqu'à L^- et montrer que

$$M = L^- \cap \frac{\bar{g}}{g} L^- = \frac{1}{\bar{g}} \mathscr{H}^{2-} \cap \frac{1}{g} \mathscr{H}^{2-}. \tag{2.4.3}$$

En effet, écrivons l'élément arbitraire $\varphi \in M \subset L^-$ sous la forme $\varphi = \overline{\varphi_1}/\bar{g}$, où $\varphi_1 \in \mathscr{H}^2$. Si φ est orthogonal à $L^{+|-} = \mathscr{P} L^+ = \frac{1}{\bar{g}} \pi \frac{\bar{g}}{g} \mathscr{H}^{2+}$, $\overline{\varphi_1}$ est orthogonal dans $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$ à l'espace $\pi \frac{g}{\bar{g}} \mathscr{H}^{2+}$. Mais comme $\pi \overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_1}$, ceci signifie que $\overline{\varphi_1}$ est orthogonal à $\frac{g}{\bar{g}} \mathscr{H}^{2+}$, et $\frac{g}{\bar{g}} \overline{\varphi_1} = \varphi \cdot g$ orthogonal à $\mathscr{H}^{2+}$ entier. Par conséquent, $\varphi g \in \mathscr{H}^{2-}$, ce qui équivaut à (2.4.3).

Représentons la fonction $\overline{\varphi_1}$ (appartenant selon l'égalité (2.4.3) tant à $\mathscr{H}^{2-}$ qu'à $\theta^{-1}\mathscr{H}^{2-}$) comme un produit de facteurs intérieur et extérieur. On a

$$\overline{\varphi_1} = \bar{\gamma}_3 \bar{\theta}_3 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \bar{\gamma}_4 \bar{\theta}_4,$$

où γ_i sont les facteurs extérieurs et θ_i intérieurs. Il est évident que $\gamma_3 = \gamma_4$, d'où

$$\theta_1 \theta_4 = \theta_2 \theta_3,$$

et comme θ_2 et θ_1 n'ont pas de facteur commun, θ_2 doit être un diviseur de θ_4. Par conséquent (2.4.3) peut s'écrire comme suit:

$$M = \frac{1}{\bar{g}} \mathscr{H}^{2-} \cap \frac{1}{g\theta_2} \mathscr{H}^{-2} = L^- \cap \frac{\bar{g}}{g\theta_2} L^-. \tag{2.4.4}$$

En utilisant maintenant la relation (2.4.4) nous allons trouver le complément orthogonal de M jusqu'à L^- (égal par définition à $L^{+|-}$). Notons que

$$\frac{\bar{g}}{g} \frac{1}{\theta_2} L^- = \bar{\theta}_1 L^- = \frac{1}{\bar{g}} \bar{\theta}_1 \mathscr{H}^{-2} \subset \frac{1}{\bar{g}} \mathscr{H}^{2-} = L^-.$$

Par conséquent, il suffit de trouver le complément orthogonal de $\frac{\bar{g}}{g} \frac{1}{\theta_2} L^-$ jusqu'à $L(F)$ entier ou, ce qui revient au même, de trouver

le complément dans $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ de l'espace $\frac{1}{\theta_2}\mathcal{H}^{2-}$ jusqu'à $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ entier. Ce dernier est évidemment $\frac{1}{\theta_2}\mathcal{H}^{2+}$, il lui correspond $\frac{1}{\theta_2}L^+(F)$ dans $L(F)$. Ainsi se trouve démontrée l'égalité (2.4.2) et par le même coup le théorème.

Demandons-nous maintenant quand on a $L^{+|-}(F) = L^0(F)$ (la position même du problème suppose qu'on se place dans le cas du temps continu). En vertu du théorème 3, pour l'égalité mentionnée on a une description complète de l'espace $L^{+|-}$.

Théorème 5. *Supposons que l'égalité* (2.2.2) *soit remplie. Pour que l'égalité* $L^{+|-}(F) = L^0(F)$ *soit vérifiée il faut et il suffit que* $1/f(\lambda)$ *soit une fonction analytique entière de degré zéro.*

Démonstration. Soit $L^{+|-}(F) = L^0(F)$. Nous allons envisager séparément les deux cas suivants.

1. $f/(1+\lambda^2) = f_1 \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$. Introduisons une nouvelle mesure spectrale de densité spectrale f_1. Il est évident que $f_1 = |g_1|^2$, où $g_1 = g/(\lambda + i) \in \mathcal{H}^{2+}$. Nous allons montrer que $\frac{1}{\bar{g}} \in L^0(F_1)$, ce qui nous permettra de conclure que, en vertu du théorème 3, $1/g$ et donc $1/f = 1/g\bar{g}$ sont des fonctions entières de degré zéro.

(2.4.1) entraîne $L^{+|-}(F) = L^-(F) \cap L^+(F)$ et le théorème 4 permet d'affirmer que $g/\bar{g} = \theta$ est une fonction intérieure. On conçoit aisément que dans ce cas $\theta_1 = \frac{g_1}{\bar{g}_1} = \theta\frac{\lambda - i}{\lambda + i}$ est également une fonction intérieure. Considérons la fonction $\varphi = \frac{\theta}{g_1(\lambda+i)} \in L^+(F_1)$ et cherchons sa projection sur $L^-(F_1)$. Comme $\mathcal{P}$ est un projecteur dans $L(F_1)$ sur $L^-(F_1)$, on a

$$\mathcal{P}\varphi = \frac{1}{\bar{g}_1}\pi\bar{g}_1\varphi = \frac{1}{\bar{g}_1}\pi\frac{\bar{g}_1}{g_1}\frac{\theta}{\lambda+i} =$$

$$= \frac{1}{\bar{g}_1}\pi\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\frac{1}{\theta_1}\frac{i\theta_1}{\lambda+i} = \frac{1}{\bar{g}_1(\lambda-i)} = \frac{1}{\bar{g}},$$

car $\frac{1}{\lambda - i} = i\int\limits_{-\infty}^{0} e^{iu(\lambda-i)}\,du$ appartient à $\mathcal{H}^{2-}$ et $\pi\frac{1}{\lambda-i} = \frac{1}{\lambda-i}$.

Nous avons ainsi montré que $1/\bar{g} = \mathcal{P}\varphi \in L^{+|-}(F_1) = L^0(F_1)$.

2. $f_1 \notin \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$. Dans ce cas (voir § 3) l'espace $L^0(F)$ et, par conséquent, l'espace qui lui est égal $L^{+|-}(F)$ ne contiennent que des constantes, dim $L^{+|-} = 1$. En vertu du théorème 6, qui sera démontré plus loin, il faut que $f = \frac{\text{const}}{1+\lambda^2}$.

La première partie du théorème se trouve donc démontrée. Nous allons passer à la démonstration de la seconde partie. Soit $\frac{1}{f(\lambda)} = b(\lambda)$ une fonction entière d'espèce zéro. Montrons d'abord que $L^{+|-} = L^+ \cap L^-$. D'après le théorème 4 il suffit à cet effet de montrer que la fonction $\theta = g/\bar{g}$ est intérieure.

En vertu de l'un des théorèmes de N. Achieser (voir [16], page 567) une fonction $b(\lambda)$ non négative sur l'axe réel peut s'écrire sous la forme

$$b(\lambda) = \omega(\lambda)\,\omega(\lambda) = |\,\omega(\lambda)\,|^2,$$

où $\omega(z)$ et $\bar{\omega}(z)$ sont des fonctions entières d'espèce zéro, ω est une fonction extérieure dans le demi-plan supérieur où elle n'a pas de zéros, et $\bar{\omega}(z) = \overline{\omega(\bar{z})}$ est une fonction extérieure dans le demi-plan inférieur. Mais alors on a $g = 1/\omega$, $\bar{g} = 1/\bar{\omega}$. Supposons ensuite que z_j sont les zéros de la fonction $b(z)$ se trouvant dans $\operatorname{Im} z < 0$. Pour $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $g/\bar{g} = \bar{\omega}/\omega$ est une fonction analytique, de plus

$$|\theta(z)| = \left|\frac{g(z)}{\bar{g}(z)}\right| = \left|\frac{\bar{\omega}(z)}{\omega(z)}\right| = \prod_n \left|\frac{1-\frac{z}{z_n}}{1-\frac{z}{\bar{z}_n}}\right| \leqslant 1, \quad |\theta(\lambda)| = 1.$$

Ces dernières relations montrent justement que θ est une fonction intérieure.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que chaque élément $\varphi \in L^+ \cap L^-$ est une fonction entière d'espèce zéro. Préalablement nous allons montrer que φ est une fonction entière. En vertu de (2.2.4)

$$\varphi(\lambda) = \omega(\lambda)\,h^+(\lambda) = \bar{\omega}(\lambda)\,h^-(\lambda),$$

où $h^+ \in \mathscr{H}^{2+}$, $h^- \in \mathscr{H}^{2-}$. Par conséquent $\varphi(\lambda)$ est la borne commune des fonctions $\omega(z)\,h^+(z)$ et $\bar{\omega}(z)\,h^-(z)$ analytiques dans $\operatorname{Im} z > 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$ respectivement. Nous allons montrer qu'elles peuvent être prolongées au-delà de la droite réelle.

Supposons que $\Phi(z) = \int_0^z \varphi(\xi)\,d\xi$, où l'intégrale est prise sur le segment de droite réunissant les points 0, z, $\varphi(\xi)$ étant soit $\omega(\xi)\,h^+(\xi)$, soit $\bar{\omega}(\xi)\,h^-(\xi)$. La fonction Φ est analytique dans les demi-plans supérieur et inférieur.

Pour la fonction $h^+ \in \mathscr{H}^{2+}$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h^+(\lambda + i\mu)|^2\,d\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h^+(\lambda)|^2\,d\lambda = C_1 < \infty, \quad \mu > 0. \quad (2.4.5)$$

Donc, quel que soit a, $|a| < \infty$, on a

$$\int_0^a |\varphi(\lambda + i\mu)|\, d\lambda = \int_0^a |\omega(\lambda + i\mu)\, h^+(\lambda + i\mu)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|z| \leqslant a} |\omega(z)| \sqrt{a}\, C_1^{1/2} \leqslant C_2 e^a. \tag{2.4.6}$$

En vertu du théorème de Paley-Wiener

$$h^+(z) = \int_0^\infty e^{izu} \hat{h}(u)\, du,$$

$$\hat{h} \in \mathscr{L}^2(-\infty, \infty), \ \operatorname{Im} z > 0,$$

de telle sorte que

$$|h^+(\lambda + i\mu)| \leqslant \left(\int_0^\infty e^{-2\mu u}\, du\right)^{1/2} C_1^{1/2} \leqslant \sqrt{\frac{C_1}{2\mu}}. \tag{2.4.7}$$

Donc

$$\int_0^\varepsilon |\varphi(a + i\mu)|\, d\mu = \int_0^\varepsilon |\omega(a + i\mu)\, h^+(a + i\mu)|\, d\mu \leqslant C_3 e^a \sqrt{\varepsilon}. \tag{2.4.8}$$

Pour presque toutes les valeurs de λ on a

$$\lim_{\mu \to 0} h^+(\lambda + i\mu) = h^+(\lambda).$$

D'où en vertu de (2.4.6) on a également

$$\lim_{\mu \to 0} \int_{i\mu}^{\lambda + i\mu} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_0^\lambda \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{2.4.9}$$

L'intégrale de la fonction analytique $\varphi(\xi)$ sur les côtés du triangle dont les sommets sont les points 0, $z = \lambda + i\mu$, λ est nulle. En vertu de (2.4.8) et (2.4.9) on a

$$\lim_{\mu \to 0} \Phi(z) = \lim_{\mu \to 0} \int_0^z \varphi(\xi)\, d\xi = \int_0^\lambda \varphi(\xi)\, d\xi = \Phi(\lambda), \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Un résultat analogue peut être obtenu dans le cas où z se trouve dans le demi-plan inférieur. Par conséquent, la fonction $\Phi(z)$ est analytique dans les demi-plans supérieur et inférieur et continue dans tout le plan complexe. L'inversion du théorème de Cauchy, à savoir le théorème de Morer (voir [18], page 186) permet d'affirmer que $\Phi(z)$ est analytique dans tout le plan. Mais alors la dérivée $\varphi(z) = \Phi'(z)$ est également une fonction entière.

Il ne nous reste plus qu'à estimer la vitesse de croissance de $|\varphi(Re^{i\theta})|$, $R \to \infty$. Sur la circonférence $|z|=R$ on a $|\omega(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon R}$, $|\bar{\omega}(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon R}$. Pour ce qui est des fonctions $h^+(z)$, $h^-(z)$, en vertu du théorème de Paley-Wiener, pour $z = Re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, on a

$$|h^+(z)| = \left| \int_0^\infty e^{izu}\hat{h}(u)\,du \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-R\sin\theta u}|\hat{h}(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2R\sin\theta}} \left(\int_0^\infty |\hat{h}(u)|^2\,du \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{C_1}{2R\sin\theta}}.$$

D'une manière analogue sur $z = Re^{i\theta}$, $\pi < \theta < 2\pi$,

$$|h^-(z)| \leqslant \sqrt{\frac{C_1}{2R|\sin\theta|}}.$$

Donc pour des R grands

$$\int_0^{2\pi} \ln^+|\varphi(Re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \varepsilon R. \tag{2.4.10}$$

La formule de Poisson-Jensen (voir [18], page 456) donne

$$\ln|\varphi(Re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\alpha - \theta)}\,d\alpha +$$

$$+ \sum \ln \frac{\rho|z - a_u|}{|\rho^2 - \bar{a}_u z|} - \alpha_0 \ln\frac{\rho}{R},$$

où $z = Re^{i\theta}$, $\rho > R$, la somme s'étend à droite à tous les zéros $a_u \neq 0$ de la fonction $\varphi(z)$ se trouvant à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \rho$ et α_0 est l'ordre de multiplicité du zéro de $\varphi(z)$ au point $z=0$. Posant ici $\rho = 2R$ et remarquant que $\ln\frac{\rho|z-a_u|}{|\rho^2 - \bar{a}_u z|} \leqslant 0$ on aura en vertu de (2.4.10)

$$\ln|\varphi(Re^{i\theta})| \leqslant \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\varphi(2Re^{i\alpha})|\,d\alpha \leqslant \varepsilon R.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Théorème 6. *Soit la mesure spectrale F absolument continue. Pour que l'espace $L^{+|-}(F)$ ait une dimension finie n il faut et il suffit que la densité spectrale soit une fonction rationnelle de λ de degré $2n$ pour les processus à temps continu ou une fonction rationnelle de $e^{i\lambda}$ de degré $2n$ pour les processus à temps discret.*

Démonstration 1. Soit $\xi(t)$ un processus à temps continu. Supposons que $\dim L^{+|-}(F) = n < \infty$. Désignons par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base quelconque dans $L^{+|-}(F)$ et soit $\eta_1, \ldots, \eta_n$ la base isométrique dans l'espace isométrique $H^{+|-}$ de variables aléatoires. En désignant par $\mathcal{P}$ le projecteur sur H^- on obtient pour la fonction de corrélation l'expression suivante:

$$B(t+s) = \mathrm{M}\xi(t)\overline{\xi(-s)} = (\xi(t), \xi(-s)) = \\ = (\mathcal{P}\xi(t), \xi(-s)) = \\ = \sum c_j(t)(\eta_j, \xi(-s)), \quad t, s \geqslant 0.$$

En désignant $(\eta_j, \xi(-s))$ par $\mu_j(s)$ on obtient

$$B(t+s) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\mu_j(s). \tag{2.4.11}$$

Quels que soient les nombres $0 < t_0 < \ldots < t_n < \infty$, les variables aléatoires $\mathcal{P}\xi(t_0), \ldots, \mathcal{P}\xi(t_n)$ sont linéairement dépendantes, de sorte que l'on peut toujours trouver les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\sum a_j B(t_j+s) = \left(\sum a_j \mathcal{P}\xi(t_j), \xi(-s)\right) \equiv 0. \tag{2.4.12}$$

Les égalités (2.4.11) et (2.4.12) suffisent pour trouver la fonction de corrélation $B(t)$. Tout d'abord, compte tenu de (2.4.11) nous montrerons que $B(t)$ est infiniment dérivable pour $t > 0$. Choisissons n fonctions $g_1(s), \ldots, g_n(s)$ infiniment dérivables à porteurs à l'intérieur de $(0, \infty)$ de telle sorte que $\det \left\| \int_0^\infty g_i(s)\mu_j(s)\,ds \right\| \neq 0$.

En vertu de (2.4.11)

$$\int_0^\infty B(t+s) g_i(s)\,ds = \sum_1^n c_j(t) \int_0^\infty g_i(s)\mu_j(s)\,ds.$$

Le premier membre de ces égalités, égal à $\int_t^\infty B(u) g_i(u-t)\,du$, est infiniment dérivable par rapport à t. Donc tous les $c_j(t)$ le sont aussi et en vertu de (2.4.11) $B(t)$, $t > 0$, possède cette propriété. En dérivant l'identité (2.4.12) on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^u}{ds^u} B(t_j+s) = 0, \quad u = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Par conséquent on peut trouver un polynôme $P(z)$ de degré non supérieur à n tel que

$$P\left(\frac{d}{ds}\right) B(s) = 0, \quad s > 0. \tag{2.4.13}$$

On sait (voir [21], page 58) que le système fondamental de solutions de l'équation (2.4.13) est composé des fonctions de la forme

$$e^{\lambda_1 s} R_1(s), \ \ldots, \ e^{\lambda_k s} R_k(s), \tag{2.4.14}$$

où tous les nombres λ_j sont différents, et $R_j(s)$ sont des polynômes de degré $n_j - 1$, $n_1 + \ldots + n_k$ étant le degré du polynôme P $(\leqslant n)$. La fonction de corrélation $B(s)$, solution de l'équation (2.4.13), est une combinaison linéaire des fonctions (2.4.14). En vertu du théorème de Riemann-Lebesgue pour $s \to \infty$ on a

$$B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda \to 0,$$

d'où tous les $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Enfin $B(s) = \overline{B(-s)}$ pour $s < 0$.

Le calcul donne directement

$$\int_0^{\infty} e^{-i\lambda s} e^{\lambda_j s} R_j(s)\, ds = \widetilde{R}_j\left(\frac{1}{\lambda_j - i\lambda}\right), \tag{2.4.15}$$

où $\widetilde{R}_j$ est une fonction rationnelle dont le degré n'est pas supérieur à $2n$. Donc

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} B(s)\, ds$$

est également une fonction rationnelle, d'un degré non supérieur à $2n$.

Pour s'assurer que la puissance de f est exactement égale à $2n$, il suffit de démontrer la seconde partie du théorème: si f est une fonction rationnelle de degré $2n$, on a $\dim L^{+|-}(F) \leqslant n$.

Cette dernière affirmation est bien connue dans la théorie des pronostics (voir [22], page 174). Pour la démonstration nous représentons la fonction rationnelle $f(\lambda)$ comme une somme de fractions simples $1/(\lambda_j \pm i\lambda)^{\alpha}$, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, et le nombre entier α n'est pas supérieur à la multiplicité n_j de pôles conjugués $\pm i\lambda_j$. En appliquant la transformation de Fourier à (2.4.15) on trouve que la fonction de corrélation $B(s)$, $s > 0$, est de nouveau une somme de fonctions de la forme (2.4.14) et donc $B(s)$ est solution d'une équation différentielle de la forme (2.4.13) de degré non supérieur à n. Les $n + 1$ solutions quelconques $B(t_0 + s), \ldots, B(t_n + s)$,

$t_j > 0$, de l'équation (2.4.13) sont linéairement dépendantes, de sorte que l'on peut trouver les nombres a_j tels que

$$\sum_0^n a_j B(t_j + s) = 0, \qquad s > 0.$$

Mais alors on a également

$$\left(\sum a_j \mathcal{P}\xi(t_j), \xi(-s)\right) = \sum_0^n a_j (\xi(t_j), \xi(-s)) = \sum_0^n a_j B(t_j + s) = 0$$

pour tous les $s > 0$, par conséquent $\sum_0^n a_j \mathcal{P}\xi(t_j) = 0$, c'est-à-dire que $n + 1$ vecteurs quelconques de $H^{+|-}$ (de $L^{+|-}$) sont linéairement dépendants. L'étude du cas du temps continu est donc terminée.

2. Supposons que $\xi(t)$ soit un processus à temps discret. La démonstration est analogue à celle qui a été donné ci-dessus et même est un peu plus simple. L'égalité (2.4.12) reste vraie mais maintenant t_j et s sont des nombres entiers. Définissons l'opérateur Δ de différence par l'égalité $\Delta B(s) = B(s + 1) - B(s)$. A partir de (2.4.12) on obtient

$$\sum_0^n a_j \Delta^k B(t_j + s) = 0,$$

ce qui permet d'obtenir l'analogue de l'équation (2.4.13), qui est dans le cas discret une équation aux différences finies

$$P(\Delta) B(s) = 0. \qquad (2.4.16)$$

La théorie de ces équations nous apprend que *) toute solution de l'équation (2.4.16) est une combinaison linéaire de n solutions fondamentales linéaires indépendantes, ayant tout comme précédemment la forme (2.4.14), mais ici dans (2.4.14) s est entier. Les raisonnements ultérieurs sont analogues au cas continu et nous les omettons. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Ce théorème explique suffisamment bien le rôle joué par les densités spectrales rationnelles dans la théorie des pronostics. Supposons que $f(\lambda)$ soit une fonction rationnelle de λ (ou de $e^{i\lambda}$) de degré $2n$. On peut l'écrire sous la forme $f = \left|\frac{P}{Q}\right|^2$, où $\frac{P}{Q} = g \in \mathcal{H}^{2+}$, Q et P étant des polynômes de degré respectif n et $n_1 \leqslant n - 1$. Il est facile de montrer que, dans le cas des processus à temps continu, les fonctions $\frac{\lambda^s}{P(\lambda)}$, $s = 0, 1, \ldots, n - 1$, forment la base de l'espace $L^{+|-}$, et dans le cas de processus à temps continu ce sont les fonc-

*) Voir, par exemple, [7].

tions $\frac{e^{ij\lambda}}{P(e^{i\lambda})}$, $j = 1, \ldots, n$, qui en constituent la base. En particulier (ceci découle d'ailleurs du théorème 5) on a $L^{+|-} = L^0$ si seulement P est une constante.

Notons que même si la mesure spectrale F n'est pas supposée absolument continue, on obtient quand même une fonction de corrélation $B(t)$ sous la forme d'une somme de fonctions (2.4.14), mais maintenant il est possible que pour certains λ_j on aura $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ (il est évident que pour tels λ_j on a $R_j(s) \equiv$ const). La transformée de Fourier de la fonction $e^{\lambda_j s}$, $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, est une δ-mesure de charge au point $\operatorname{Im}\lambda_j$. Se souvenant du point 1 des théorèmes 1, 2 on arrive à affirmation générale suivante:

$$\dim L^{+|-}(F) = n < \infty,$$

si et seulement si $F = F_a + F_s$, avec la condition que la dérivée F'_a de la partie absolument continue soit une fonction rationnelle $\lambda(e^{i\lambda})$ de degré $2n_1$, et la mesure singulière F_s soit concentrée en n_2 points différents, $n_1 + n_2 = n$.

§ 5. Structure de la σ-algèbre des événements $\mathfrak{A}(T)$

Dans le présent paragraphe nous allons montrer comment certains résultats relatifs aux sous-espaces $H(T)$ (ou aux sous-espaces $L_T(F)$ qui leur sont isométriques) conduisent dans le cas de processus gaussiens à des théorèmes sur les σ-algèbres $\mathfrak{A}(T)$. On trouvera d'autres résultats relatifs à ces questions dans le chapitre IV.

Revenons aux relations (2.4.1) et essayons de trouver des analogues de ces relations et des autres résultats du § 4 dans le langage des σ-algèbres $\mathfrak{A}(T)$. On conçoit aisément qu'à l'espace $H^- = H(-\infty, 0)$ (ou à l'espace $L^-(F)$ qui lui est isométrique) correspond une σ-algèbre des événements $\mathfrak{A}^- = \mathfrak{A}(-\infty, 0)$, à l'espace $H^+ = H(0, \infty)$ une σ-algèbre $\mathfrak{A}^+ = \mathfrak{A}(0, \infty)$, à l'espace $H^0 = \bigcap_{t>0} H(-t, t) = \bigcap_{t>0} H(0, t)$ une σ-algèbre $\mathfrak{A}^0 = \bigcap_{t>0} \mathfrak{A}(-t, t)$.

Le cas de l'analogue de l'espace $H^{+|-}$ (ou, ce qui est la même chose, de $L^{+|-}(F)$), qui est la projection dans H de H^+ sur H^-, est plus compliqué. Introduisons préalablement la notion suivante. Définition: on appelle *σ-algèbre séparatrice* *) au point t pour le processus $\xi(t)$ toute σ-algèbre $\mathfrak{A}_1^{(t)} \subseteq \mathfrak{A}(-\infty, t)$ par rapport à laquelle le passé du processus $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ et son comportement futur

---

*) Le terme de σ-algèbre séparatrice a été introduit par McKean, voir le renvoi de la page 53.

$\mathfrak{A}(t, \infty)$ sont conditionnellement indépendants, c'est-à-dire que pour $A \in \mathfrak{A}(-\infty, t)$, $B \in \mathfrak{A}(t, \infty)$ quelconques on a

$$\mathbf{P}\{AB \mid \mathfrak{A}_1^{(t)}\} = \mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_1^{(t)}\}\, \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}_1^{(t)}\}.$$

Il est facile de voir que la σ-algèbre séparatrice au point t existe toujours, c'est par exemple le cas de la σ-algèbre $\mathfrak{A}(-\infty, t)$. Il est évident que c'est la σ-algèbre séparatrice minimale au point t (et nous allons montrer plus loin qu'elle existe toujours) qui présente un intérêt particulier. Pour les processus de Markov, par exemple, la σ-algèbre séparatrice minimale au point t est la σ-algèbre engendrée par la variable aléatoire $\xi(t)$.

Pour les processus stationnaires au sens strict, en particulier pour les processus stationnaires gaussiens, il suffit d'envisager les σ-algèbres séparatrices au point 0. Nous désignerons par $\mathfrak{A}^{+|-}$ la σ-algèbre séparatrice minimale au point 0; comme le montreront les raisonnements ultérieurs, c'est cette σ-algèbre qui est l'analogue naturel de l'espace $H^{+|-}$.

Théorème 7. *Soit $\xi(t)$ un processus stationnaire gaussien de mesure spectrale $F(d\lambda)$. Les inclusions suivantes*

$$\mathfrak{A}^- \supseteq \mathfrak{A}^{+|-} \supseteq \mathfrak{A}^- \cap \mathfrak{A}^- \supseteq \mathfrak{A}^0 \tag{2.5.1}$$

sont toujours vérifiées. Chacun des signes $\supseteq$ dans (2.5.1) *peut être remplacé par une égalité si et seulement si le peut le signe $\supseteq$ correspondant dans les relations*

$$H^- \supseteq H^{+|-} \supseteq H^- \cap H^+ \supseteq H^0 \tag{2.5.2}$$

ou ce qui est la même chose dans les relations (2.4.1)

$$L^-(F) \supseteq L^{+|-}(F) \supseteq L^-(F) \cap L^+(F) \supseteq L^0(F).$$

Pour la démonstration nous allons commencer par l'étude des propriétés générales des σ-algèbres séparatrices.

Lemme 3. *Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire quelconque,* $\mathfrak{A}^- = \mathfrak{A}(-\infty, 0)$, $\mathfrak{A}^+ = (0, \infty)$.

Dans ce cas:

1) $\mathfrak{A}^-$ *est une σ-algèbre séparatrice* (*au point* 0);

2) *si $\mathfrak{A}_1$ est une σ-algèbre séparatrice et que l'événement $B \in \mathfrak{A}^+$, on a* $\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^-\} = \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}_1\}$;

3) *si $\mathfrak{A}_1$ est une σ-algèbre séparatrcie et que l'on a $\mathfrak{A}^- \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ est alors également une σ-algèbre séparatrice*;

4) *si les σ-algèbres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont séparatrices, la σ-algèbre $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ est également séparatice*;

5) *la σ-algèbre séparatrice minimale $\mathfrak{A}^{+|-}$ existe*;

6) *on a toujours $\mathfrak{A}^{+|-} \supseteq \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-$.*

Démonstration du lemme. Désignons par χ_A l'indicateur de l'événement A, c'est-à-dire

$$\chi_A = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A. \end{cases}$$

1) En vertu des propriétés des espérances mathématiques conditionnelles pour $A^- \in \mathfrak{A}^-$, $B \in \mathfrak{A}^+$ on a

$$\mathbf{P}\{AB \mid \mathfrak{A}^-\} = \mathbf{M}\{\chi_A \cdot \chi_B \mid \mathfrak{A}^-\} = \chi_A \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\} = \\ = \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}^-\}\, \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\} = \mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}^-\}\, \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^-\}.$$

2) Par définition de la σ-algèbre séparatrice, on a $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}^-$, de sorte que la variable aléatoire $\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}_1\}$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{A}^-$. Il suffit donc de démontrer que les intégrales des variables aléatoires $\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}$, $\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\}$ sur un ensemble quelconque $A \in \mathfrak{A}_1$ coïncident et de se référer au théorème de Radon-Nikodym. On a

$$\int_A \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\}\, d\mathbf{P} = \mathbf{M}\{\chi_A \cdot \chi_B\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\chi_A \cdot \chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}\} = \\ = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_1\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}\} = \mathbf{M}\{\chi_A \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}\} = \\ = \int_A \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}\, d\mathbf{P}.$$

3) Supposons que $A \in \mathfrak{A}^-$, $B \in \mathfrak{A}^+$. Les deux membres de l'égalité présumée $\mathbf{M}\{\chi_A \cdot \chi_B \mid \mathfrak{A}_2\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_2\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\}$ étant mesurables par rapport à $\mathfrak{A}_2$, il suffit de montrer comme précédemment que leurs intégrales sur un ensemble quelconque $C \in \mathfrak{A}_2$ coïncident. En vertu du point 2, on a $\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} = \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\}$ et par conséquent $\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} = \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\}$. Donc

$$\int_C \mathbf{M}\{\chi_A\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\}\, d\mathbf{P} = \mathbf{M}\{\chi_A\chi_B\chi_C\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\chi_A\chi_C \mid \mathfrak{A}_1\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}\} = \\ = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\chi_A\chi_C \mid \mathfrak{A}_2\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\} \mid \mathfrak{A}_1\}\} = \\ = \mathbf{M}\{\chi_C \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_2\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\}\} = \int_C \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_2\} \cdot \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\}\, d\mathbf{P}.$$

4) Notons tout d'abord que pour une variable aléatoire quelconque ζ ($\mathbf{M}\zeta = 0$, $\mathbf{M}\,|\zeta|^2 < \infty$) on a l'égalité

$$\mathbf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\ldots \mathbf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{A}_1\} \mid \mathfrak{A}_2\} \mid \mathfrak{A}_1 \ldots\}. \quad (2.5.3)$$

En effet, considérons l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}$ de toutes les variables aléatoires de moyenne nulle, de variance finie et de produit scalaire $(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{M}\eta_1\eta_2$. Désignons par $\boldsymbol{H}_i$, $i = 1, 2$, les sous-espaces de $\boldsymbol{H}$

formés de variables mesurables par rapport à $\mathfrak{A}_i$. Les opérateurs $\mathcal{P}_i = \mathbf{M}\{\cdot \mid \mathfrak{A}_i\}$ sont alors les projections dans $\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{H}_i$. Le premier membre de l'égalité (2.5.3) est la projection de ζ sur $\boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2$, le second membre est le résultat de l'application à ζ de l'opérateur $\lim_n (\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1)^n$ égal au projecteur sur $\boldsymbol{H}_1 \cap \boldsymbol{H}_2$.

Soient maintenant $A \in \mathfrak{A}^-$, $B \in \mathfrak{A}^+$. On a alors

$$\mathbf{M}\{\chi_A\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_1\}\cdot\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\}. \tag{2.5.4}$$

En vertu du point 2 et de l'égalité (2.5.3) on a

$$\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\} = \lim_n \underbrace{\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\ldots\mathbf{M}}_{n \text{ fois}}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} \mid \mathfrak{A}_2\}\mathfrak{A}_1 \ldots\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} = \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_2\} = \mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^-\}.$$

Donc si l'on applique aux deux membres de l'égalité (2.5.4) l'opérateur $\mathbf{M}\{\cdot \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\}$, on trouve

$$\mathbf{M}\{\chi_A\chi_B \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\} = \mathbf{M}\{\chi_A\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1\} \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\}\cdot\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2\}. \tag{2.5.5}$$

5) En vertu du point 1) l'ensemble de toutes les σ-algèbres séparatrices n'est pas vide. Supposons que $\mathfrak{A}^{+|-}$ soit l'intersection de toutes les σ-algèbres séparatrices. Nous allons montrer que $\mathfrak{A}^{+|-}$ est une σ-algèbre séparatrice et, par conséquent, minimale. En vertu du point 2) toutes les probabilités $\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}_1\}$, où $B \in \mathfrak{A}^+$ et $\mathfrak{A}_1$ une σ-algèbre séparatrice quelconque, coïncident et sont donc égales à $\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}$. En écrivant l'espérance mathématique des deux membres de (2.5.4) conditionnellement à $\mathfrak{A}^{+|-}$ on trouve d'une manière analogue à (2.5.5)

$$\mathbf{M}\{\chi_A\chi_B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}\,\mathbf{M}\{\chi_B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\},$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{A}^{+|-}$ est une σ-algèbre séparatrice.

6) La relation $\mathfrak{A}^{+|-} \supseteq \mathfrak{A}^- \cap \mathfrak{A}^+$ est évidente. Le lemme se trouve ainsi démontré.

L e m m e 4. *Soit* $\xi(t)$ *un processus stochastique continu stationnaire au sens strict ; on a alors*

$$\mathfrak{A}^{+|-} \supseteq \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^- \supseteq \mathfrak{A}^0. \tag{2.5.6}$$

Nous commençons par l'inclusion de gauche. Soit $B \in \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-$. Comme $\mathfrak{A}^{+|-}$ est une σ-algèbre séparatrice, on a

$$\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\} = \mathbf{P}\{BB \mid \mathfrak{A}^{+|-}\} = (\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\})^2.$$

Cette égalité signifie que la variable aléatoire $\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}$ ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 1. Soient $A = \{\omega : \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\} = 1\}$

et $\bar{A}$ le complémentaire de A. Il est évident que $A \in \mathfrak{A}^{+|-}$, $\bar{A} \in \mathfrak{A}^{+|-}$. Donc

$$\int_A \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}\{AB\} = \mathbf{P}\{A\},$$

$$\int_{\bar{A}} \mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}\, d\mathbf{P} = \mathbf{P}\{\bar{A}B\} = 0.$$

Ces égalités permettent de conclure que B diffère de A d'au plus un événement de probabilité nulle, de telle sorte que $B = A \in \mathfrak{A}^{+|-}$.

Passons à la démonstration de l'inclusion de droite de (2.5.6). Posons $\mathfrak{A}^{0+} = \bigcap_{t>0} \mathfrak{A}(0, t)$, $\mathfrak{A}^{0-} = \bigcap_{t>0} \mathfrak{A}(-t, 0)$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{A}^{0+} = \mathfrak{A}^{0-} = \mathfrak{A}^{0}$. Le processus stochastique continu $\xi(t)$ engendre un groupe de transformations conservant la probabilité $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}A$, $A \in \mathfrak{A}(-\infty, \infty)$, donnant à son tour un groupe d'opérateurs continus unitaires $\boldsymbol{U}^t$ sur $\boldsymbol{H}$ *). Soit A un événement de $\mathfrak{A}^0$. De toute évidence $\boldsymbol{T}^t A \in \mathfrak{A}(0, t)$. Soit encore $\eta(t)$ l'indicateur de l'événement $\boldsymbol{T}^t A$. Il est clair que $\eta(t) = \boldsymbol{U}^t \chi_A$ est un processus stationnaire continu en moyenne quadratique. Donc

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{M} \mid \eta(t) - \eta(0) \mid^2 = 0.$$

Pour tous les $t > 0$ les variables aléatoires $\eta(t)$ sont mesurables par rapport à $\mathfrak{A}(0, t)$ et donc $\eta(0)$ l'est par rapport à $\mathfrak{A}^{0+}$. D'une manière analogue on peut montrer que $\eta(0)$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{A}^{0-}$. Par conséquent $A \in \mathfrak{A}^{0+}$, $A \in \mathfrak{A}^{0-}$ et $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^{0+} = \mathfrak{A}^{0-}$.

En remarquant maintenant que l'inclusion de gauche de (2.5.1) est triviale on voit qu'avec le lemme 4 la première partie du théorème se trouve démontrée. Il reste à voir quand dans (2.5.1) on a des égalités. A cet effet nous allons démontrer plusieurs lemmes concernant les relations existant entre les σ-algèbres $\mathfrak{A}(T)$ et les espaces $H(T)$. Nous conviendrons de désigner par $A(\Xi)$ la σ-algèbre des événements minimale engendrée par l'ensemble des variables aléatoires Ξ. Ainsi, par exemple, $\mathfrak{A}(T) = A(\xi(t), t \in T)$. De même $\mathfrak{A}^- = A(H^-)$.

Lemme 5. *La σ-algèbre séparatrice minimale d'un processus gaussien stationnaire est*

$$\mathfrak{A}^{+|-} = A(H^{+|-}).$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que $\mathfrak{A}^{+|-} \supseteq A(H^{+|-})$. Désignons par $\mathscr{P}^- = \mathscr{P}$ le projecteur dans $H(-\infty, \infty)$ sur H. Il est évident que $\mathscr{P} = \mathbf{M}\{\cdot \mid \mathfrak{A}^-\}$. La varia-

*) Voir [22], pages 206-211.

ble aléatoire $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, peut être approchée en moyenne quadratique, aussi bien que l'on veut par une combinaison linéaire des indicateurs χ_B, $B \in \mathfrak{A}^+$. Donc sur la base du point 2) du lemme 3 on a

$$\mathcal{P}\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t) \mid \mathfrak{A}^-\} = \mathbf{M}\{\xi(t) \mid \mathfrak{A}^{+|-}\}.$$

Par conséquent tous les éléments de l'espace $H^{+|-}$ sont mesurables par rapport à $\mathfrak{A}^{+|-}$ et $A(H^{+|-}) \subseteq \mathfrak{A}^{+|-}$.

Nous allons maintenant montrer que $A(H^{+|-})$ sépare les σ-algèbres $\mathfrak{A}^+$, $\mathfrak{A}^-$. Comme $\mathfrak{A}^{+|-}$ est une σ-algèbre séparatrice minimale, ceci et ce qui précède permet d'écrire $\mathfrak{A}^{+|-} = A(H^{+|-})$. Soit χ_A l'indicateur de l'événement $A \in \mathfrak{A}^-$; supposons que la variable aléatoire η, mesurable par rapport à $\mathfrak{A}^+$, puisse être représentée sous la forme du produit $\eta = \eta_1\eta_2$, où η_1 est mesurable par rapport à $A(H^{+|-})$ et η_2 est indépendant de la σ-algèbre $\mathfrak{A}^-$. Nous allons montrer que

$$\mathbf{M}\{\chi_A\eta \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid A(H^{+|-})\}\cdot\mathbf{M}\{\eta \mid A(H^{+|-})\}. \quad (2.5.7)$$

En effet

$$\mathbf{M}\{\chi_A\eta \mid A(H^{+|-})\} = \eta_1\mathbf{M}\{\chi_A\eta_2 \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\eta_1 \mid A(H^{+|-})\} \times$$
$$\times\,\mathbf{M}\{\chi_A\mathbf{M}\{\eta_2 \mid \mathfrak{A}^-\} \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\eta_1 \mid A(H^{+|-})\}\cdot\mathbf{M}\eta_2 \times$$
$$\times\,\mathbf{M}\{\chi_A \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\eta_1\eta_2 \mid A(H^{+|-})\}\cdot\mathbf{M}\{\chi_A \mid A(H^{+|-})\}.$$

Une variable aléatoire quelconque $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, peut s'écrire sous la forme d'une somme $\xi(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$, où $\eta_1(t) = \mathcal{P}\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t) \mid \mathfrak{A}^-\} \in H^{+|-}$ et par conséquent $\eta_1(t)$ est mesurable par rapport à $A(H^{+|-})$, et $\eta_2(t)$ est orthogonal à H^-. Les variables gaussiennes orthogonales étant indépendantes, $\eta_2(t)$ ne dépend d'aucun élément de H^-, ni par conséquent de la σ-algèbre $\mathfrak{A}^-$.

Soit maintenant $Q = Q(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$ un polynôme des grandeurs $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$, $t_i \geqslant 0$. En écrivant chaque $\xi(t_i)$ comme la somme $\eta_1(t_i) + \eta_2(t_i)$ on pourra écrire le polynôme Q comme une somme de la forme $\sum_j \zeta_j$, où chacun des $\zeta_j = \eta_{1j}\cdot\eta_{2j}$, η_{1j} est mesurable par rapport à $A(H^{+|-})$, et η_{2j} ne dépend pas de $\mathfrak{A}^-$. En vertu de (2.5.7) pour tout polynôme Q de ce type on a

$$\mathbf{M}\{\chi_A\cdot Q \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid A(H^{+|-})\}\cdot\mathbf{M}\{Q \mid A(H^{+|-})\}. \quad (2.5.8)$$

Supposons maintenant que B soit un événement de $\mathfrak{A}^+$. Comme nous l'avons démontré dans le § 5 du chapitre I, toute variable aléatoire de variance finie mesurable par rapport à $\mathfrak{A}^+$, en particulier χ_B, est la limite en moyenne quadratique des polynômes Q du type mentionné. A partir de (2.5.8) on obtient

$$\mathbf{M}\{\chi_A\cdot\chi_B \mid A(H^{+|-})\} = \mathbf{M}\{\chi_A \mid A(H^{+|-})\}\cdot\mathbf{M}\{\chi_B \mid A(H^{+|-})\},$$

c'est-à-dire que $A(H^{+|-})$ est une σ-algèbre séparatrice. Le lemme se trouve ainsi démontré.

L e m m e 6. *Pour un processus gaussien stationnaire on a*

$$\mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^- = A\,(H^+ \cap H^-).$$

Il suffit de montrer que pour un polynôme quelconque P des variables aléatoires $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ on a

$$\mathbf{M}\,\{P \mid \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-\} = \mathbf{M}\,\{P \mid A\,(H^+ \cap H^-)\}. \qquad (2.5.9)$$

Nous allons montrer cette égalité par récurrence. Pour $n = 1$, $P = \xi(t)$ est un élément de l'espace $H(-\infty, \infty)$. Puis pour tous ζ tels que $\mathbf{M}\zeta^2 < \infty$ on a l'égalité suivante, analogue à (2.5.3)

$$\mathbf{M}\{\zeta \mid \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-\} = \lim_n \underbrace{\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\ldots \mathbf{M}}_{2n \text{ fois}}\{\zeta \mid \mathfrak{A}^+\} \mid \mathfrak{A}^-\} \ldots \mid \mathfrak{A}^-\}. \quad (2.5.10)$$

Il est clair que $\mathfrak{A}^+ = A(H^+)$, $\mathfrak{A}^- = A(H^-)$ de telle sorte que si h est un élément de $H(-\infty, \infty)$ on a *) $\mathbf{M}\,\{h \mid \mathfrak{A}^+\} \in H^+ \subset H(-\infty, \infty)$. Par conséquent compte tenu de (2.5.10) on a également $\mathbf{M}\,\{h \mid \mathfrak{A}^- \cap \mathfrak{A}^+\} \in H(-\infty, \infty)$ pour tous les $h \in H(-\infty, \infty)$. La variable aléatoire $\mathbf{M}\,\{h \mid \mathfrak{A}^- \cap \mathfrak{A}^+\}$ étant mesurable par rapport à $\mathfrak{A}^-$, elle appartient à H^-; on a de même $\mathbf{M}\,\{h \mid \mathfrak{A}^- \cap \mathfrak{A}^+\} \in H^+$. L'égalité (2.5.9) se trouve ainsi démontrée pour des polynômes du premier degré.

Le reste de la démonstration est analogue aux raisonnements du § 5 du chapitre I. Supposons que l'égalité (2.5.9) soit démontrée pour tous les polynômes P de degré non supérieur à $n - 1$, $n \geqslant 2$, démontrons-la pour des polynômes de degré n. Il suffit d'envisager des polynômes P de la forme $\xi(t_1) \ldots \xi(t_n)$. Nous conviendrons de désigner par $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ les opérateurs $\mathbf{M}\,\{\cdot \mid \mathfrak{A}^+\}$, $\mathbf{M}\,\{\cdot \mid \mathfrak{A}^-\}$ qui sont les projecteurs dans $\boldsymbol{H}$ sur $\boldsymbol{H}^+$, $\boldsymbol{H}^-$ respectivement. Si $\xi(t_i) = \mathcal{P}^+\xi(t_i) + \eta(t_i) = \xi_1(t_i) + \eta(t_i)$, tous les $\eta(t_i)$ sont orthogonaux à H^+ et par conséquent indépendants de $\mathfrak{A}^+$. On a

$$\mathbf{M}\,\{P \mid \mathfrak{A}^+\} = \xi_1(t_1) \ldots \xi_1(t_n) + Q_1,$$

où Q_1 est la limite en moyenne quadratique des polynômes de degré non supérieur à $n - 1$. Posant ensuite $\xi_1(t_i) = \mathcal{P}^{-1}\,\xi_1(t_i) + \eta_1(t_i) = \xi_2(t_i) + \eta_1(t_i)$ on obtient

$$\mathbf{M}\,\{\xi_1(t_1) \ldots \xi_1(t_n) + Q_1 \mid \mathfrak{A}^-\} = \xi_2(t_1) \ldots \xi_2(t_n) + Q_2,$$

où Q_2 est de nouveau la limite en moyenne quadratique des polynômes de degré non supérieur à $n - 1$. En procédant ainsi de suite on

*) Voir chapitre I, § 5.

trouve finalement

$$\mathbf{M}\{P \mid \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-\} = \prod_{i=1}^{n} (\ldots \mathcal{P}^- \mathcal{P}^+ \xi(t_i)) + Q =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{M}\{\xi(t_i) \mid \mathfrak{A}^+ \cap \mathfrak{A}^-\} + Q = \prod_{1}^{n} \mathbf{M}\{\xi(t_i) \mid A(H^+ \cap H^-)\} + Q.$$

Le premier terme du membre de droite est évidemment mesurable par rapport à $A(H^+ \cap H^-)$, le second l'est par rapport à la même σ-algèbre par hypothèse. L'égalité (2.5.9) et par conséquent le lemme se trouvent démontrés.

L e m m e 7. *Pour un processus gaussien stationnaire on a*

$$\mathfrak{A}^0 = A(H^0). \tag{2.5.11}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que $\mathfrak{A}^0 \supseteq A(H^0)$. L'inclusion inverse peut se démontrer tout comme dans le lemme 6. On démontre par récurrence sur la puissance n des polynômes P de $\xi(t_1) \ldots \xi(t_n)$ que pour un polynôme quelconque on a

$$\mathbf{M}\{P \mid \mathfrak{A}^0\} = \mathbf{M}\{P \mid A(H^0)\}. \tag{2.5.12}$$

De la dernière égalité découle l'égalité (2.5.11). Le passage par récurrence de $n-1$ à n s'opérant de la même manière que dans le lemme 6, nous démontrerons l'égalité (2.5.12) seulement pour des polynômes du premier degré. Soit $P = h \in H(-\infty, \infty)$. Alors toutes les variables aléatoires $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}(0, 1/n)\}$ et leurs limites en moyenne quadratique $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}^0\}$ sont des éléments de l'espace $H(-\infty, \infty)$. Ensuite, comme toutes les $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}(0, s)\}$, $s < t$, appartiennent à l'espace $H(0, s) \subset H(0, t)$, $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}^0\}$ appartient également à tous les $H(0, t)$, c'est-à-dire que $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}^0\} \in H^0$ et par conséquent $\mathbf{M}\{h \mid \mathfrak{A}^0\} = \mathbf{M}\{h \mid A(H^0)\}$. Le lemme se trouve donc démontré.

Les lemmes 5-7 permettent de démontrer immédiatement la seconde partie du théorème concernant les conditions d'égalité dans les relations (2.5.1). Démontrons par exemple que $\mathfrak{A}^{+|-} = \mathfrak{A}^0$ si et seulement si $H^{+|-} = H^0$; les autres cas peuvent être étudiés de la même manière. Supposons que $H^{+|-} = H^0$; en vertu des lemmes démontrés ci-dessus on a $\mathfrak{A}^{+|-} = A(H^{+|-}) = A(H^0) = \mathfrak{A}^0$. Inversement, supposons que $H^{+|-} \neq H^0$, on a alors $H^{+|-} \supset H^0$ et il existe une variable aléatoire $h \in H^{+|-}$ orthogonale à l'espace H^0. Etant gaussienne, elle est indépendante de tous les éléments de H et donc de la σ-algèbre $A(H^0) = \mathfrak{A}^0$. Par conséquent l'événement $\{h < 0\} \in A(H^{+|-}) = \mathfrak{A}^{+|-}$ ne dépend pas de la σ-algèbre $\mathfrak{A}^0$ et ne peut lui appartenir. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Les résultats du paragraphe précédent conjointement avec le théorème qui vient d'être démontré permettent d'exprimer en termes de densité spectrale les conditions pour lesquelles les inclusions dans (2.5.1) deviennent égalités. Soit par exemple $\xi(t)$ un processus gaussien stationnaire de densité spectrale $f(\lambda)$; pour que la σ-algèbre $\mathfrak{A}^0$ coïncide avec la σ-algèbre séparatrice minimale $\mathfrak{A}^{+|-}$ il faut et il suffit que $1/f(\lambda)$ soit une fonction entière de degré zéro. Il est bon de noter de plus que le processus aléatoire $\xi(t)$ est markovien si pour tous les t la σ-algèbre séparatrice minimale au point t coïncide avec l'algèbre engendrée par la variable aléatoire $\xi(t)$; donc le processus $\xi(t)$ est markovien si et seulement si $1/f(\lambda)$ est un polynôme du second degré (il est markovien à m chaînons si $1/f(\lambda)$ est un polynôme de degré $2m$).

CHAPITRE III

DISTRIBUTIONS GAUSSIENNES ÉQUIVALENTES ET LEURS DENSITÉS

§ 1. Notions préliminaires

1. Introduction. Soit $\xi = \xi(t)$ une fonction aléatoire gaussienne du paramètre $t \in T$ à valeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Nous allons supposer que la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ est engendrée par toutes les valeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ dans Ω (le paramètre t parcourt tout l'ensemble T), de telle sorte que la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\xi$ est gaussienne.

Soit $\mathbf{P}_1$ une autre mesure gaussienne sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ *). On dit qu'elle est *absolument continue* par rapport à $\mathbf{P}$ si $\mathbf{P}_1(A) = 0$ pour $\mathbf{P}(A) = 0$, $A \in \mathfrak{A}$. On sait qu'une mesure absolument continue $\mathbf{P}_1$ peut s'écrite sous la forme

$$\mathbf{P}_1(A) = \int_A p(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega), \quad A \in \mathfrak{A}, \tag{3.1.1}$$

où $p(\omega)$ est une fonction non négative donnée sur Ω, appelée *densité* et désignée par $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$. Les mesures $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ sont dites *équivalentes* si elles sont mutuellement absolument continues. Les mesures $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ sont dites *orthogonales* si existent des ensembles disjoints A et $A_1 \in \mathfrak{A}$ (dits porteurs des mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ respectivement) tels que

$$\mathbf{P}(A) = 1, \quad \mathbf{P}(A_1) = 0$$

et

$$\mathbf{P}_1(A) = 0, \quad \mathbf{P}_1(A_1) = 1. \tag{3.1.2}$$

La continuité absolue signifie que quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{P}_1(A) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mathbf{P}(A) \leqslant \delta \tag{3.1.3}$$

---

*) Plus exactement, la mesure $\mathbf{P}_1$ est telle que la fonction aléatoire $\xi(t)$ sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_1)$ est gaussienne.

pour tous les $A \in \mathfrak{A}$. Ceci découle, par exemple, directement de l'inégalité

$$\mathbf{P}_1(A) = \int_A p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) \leqslant N\mathbf{P}(A) + \int_{|p(\omega)|>N} p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega),$$

où

$$\int_{|p(\omega)|>N} p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

lorsque N est suffisamment grand ; par exemple, $\mathbf{P}_1(A) \leqslant \varepsilon$ pour $\mathbf{P}(A) \leqslant \varepsilon/(2N)$.

Toute mesure $\mathbf{P}_1$ peut se représenter *) comme une somme des mesures orthogonales $\mathbf{P}_1'$ et $\mathbf{P}_1''$ dont l'une, $\mathbf{P}_1'$, est orthogonale à $\mathbf{P}$, et l'autre, $\mathbf{P}_1''$, est absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$. Par conséquent

$$\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_1'(A) + \int_A p''(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) \qquad (3.1.4)$$

avec

$$p''(\omega) = \mathbf{P}_1''(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega).$$

Remarquons que *les mesures* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales si pour une certaine suite d'ensembles* $A_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, *on a les relations*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1(A_n) = 1. \qquad (3.1.5)$$

Ceci découle, par exemple, de ce que pour des mesures non orthogonales on a $\mathbf{P}_1''(\Omega) > 0$ et $\mathbf{P}_1'(\Omega) < 1$ et sous la condition $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1'(A_n) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1''(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1'(A_n) \leqslant \mathbf{P}_1'(\Omega) < 1.$$

Dans différents domaines de la théorie des processus aléatoires et en statistique mathématique, en théorie de l'information, etc., on a souvent à répondre aux questions suivantes : quand les mesures données $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ sont équivalentes (ou orthogonales), comment calculer la densité $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ des mesures équivalentes, comment décrire explicitement les « porteurs » disjoints A et A_1 des mesures orthogonales ?

Il est évident que (voir § 2, chapitre I) pour répondre à ces questions on peut passer des mesures gaussiennes $\mathbf{P}(d\omega)$ et $\mathbf{P}_1(d\omega)$ dans l'espace initial Ω aux distributions gaussiennes correspondantes $\mathbf{P}(dx)$ et $\mathbf{P}_1(dx)$ dans l'espace fonctionnel $(X, \mathfrak{B})$ des fonctions réelles $x = x(t)$ du paramètre $t \in T$, contenant toutes les trajectoires $\xi(\omega, \cdot) = \xi(\omega, t)$, où la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ est engendrée par tous les

*) Voir, par exemple, [8], page 111.

ensembles cylindriques de cet espace (voir formules (1.2.1) à (1.2.3)). En particulier, on peut toujours passer aux distributions de probabilités $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ dans l'espace $X = R^T$ de toutes les fonctions réelles $x = x(t)$ de $t \in T$.

Pour une grandeur $\varphi = \varphi(x)$ quelconque de X mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$, la grandeur $\eta = \varphi[\xi(\omega, \cdot)]$ sur Ω sera mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}$; de même si $\varphi = \varphi(x)$ est intégrable, η sera également intégrable, et

$$\int_X \varphi(x)\,\mathbf{P}(dx) = \int_\Omega \eta[\xi(\omega, \cdot)]\,\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{M}\eta. \tag{3.1.6}$$

Encore, pour l'ensemble mesurable $\xi(\Omega)$ toute grandeur mesurable η peut s'écrire sous la forme $\eta = \varphi[\xi(\omega, \cdot)]$, où $\varphi = \varphi(x)$ est une grandeur mesurable sur $(X, \mathfrak{B})$.

En effet, comme on a vu dans le § 2 du chapitre I, tout ensemble $A = \{\xi \in B\}$ est une contre-image dans l'application de $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ de Ω dans X, où B est un ensemble de la σ-algèbre $\mathfrak{B}$. Donc pour des ensembles mesurables quelconques $A_k = \{\xi \in B_k\}$ les grandeurs $\eta = \sum_k c_k \chi_{A_k}(\omega)$ (où χ_A est l'indicateur de l'ensemble A, c'est-à-dire $\chi_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\chi_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$) peuvent s'écrire comme $\eta = \sum_k c_k \chi_{B_k}[\xi(\omega, \cdot) = \varphi[\xi(\omega, \cdot)]$. Toute grandeur mesurable $\eta = \eta(\omega)$ est la limite, uniforme par rapport à $\omega \in \Omega$, des grandeurs $\eta_n = \varphi_n[\xi(\omega, \cdot)]$ du type mentionné. Il est clair que $\eta = \varphi[\xi(\omega, \cdot)]$, où la fonction $\varphi = \varphi(x)$ sur l'ensemble mesurable des $\xi(\Omega)$ est déterminée comme la limite, uniforme par rapport à $x \in \xi(\Omega)$, des fonctions correspondantes $\varphi_n = \varphi_n(x)$.

De l'égalité (3.1.6) il découle en particulier que si $p(x) = \mathbf{P}_1(dx)/\mathbf{P}(dx)$ est la densité des distributions de probabilités $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$, alors $p[\xi(\omega, \cdot)] = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ est la densité des mesures de probabilité initiales dans l'espace Ω, car tout ensemble $A \in \mathfrak{A}$ peut s'écrire comme $A = \{\xi \in B\}$ avec $B \in \mathfrak{B}$, et en vertu de (3.1.6)

$$\mathbf{P}_1(B) = \int_B p(x)\,\mathbf{P}(dx) = \int_A p[\xi(\omega, \cdot)]\,\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{P}_1(A).$$

Notons que les fonctions aléatoires équivalentes $\xi(t)$ et $\tilde{\xi}(t)$ ont même distribution de probabilités dans l'espace fonctionnel correspondant $X = R^T$, de telle sorte que si, par exemple, pour presque tous les $\omega \in \Omega$

$$\tilde{\xi}(\omega, t) = \xi(\omega, t), \tag{3.1.7}$$

par rapport à $\mathbf{P}(d\omega)$ et $\mathbf{P}_1(d\omega)$, les mesures de probabilité $\mathbf{P}(d\omega)$ et $\mathbf{P}_1(d\omega)$ sont équivalentes ou orthogonales sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_\xi$

si et seulement si elles sont douées de cette propriété sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_{\tilde{\xi}}$ engendrée par les grandeurs $\tilde{\xi}(t)$, $t \in T$.

Au sujet de la condition (3.1.7) il faut mentionner également *) que lorsque l'on rajoute aux σ-algèbres $\mathfrak{A}_{\xi}$ et $\mathfrak{A}_{\tilde{\xi}}$ des ensembles de la mesure 0 (par rapport aux $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ équivalentes) on arrive à la même σ-algèbre $\mathfrak{A}^*$, la densité $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur $\mathfrak{A}_{\xi}$ (ou $\mathfrak{A}_{\tilde{\xi}}$) étant également la densité sur la σ-algèbre complète $\mathfrak{A}^*$: pour un ensemble quelconque $A^* \in \mathfrak{A}^*$ on a

$$\int_{A^*} p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) = \int_{A} p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_1(A^*), \qquad (3.1.8)$$

où l'ensemble $A \in \mathfrak{A}_{\xi}$ (ou $A \in \mathfrak{A}_{\tilde{\xi}}$) est choisi de telle sorte que pour la différence symétrique $A^* \circ A = (A^* \setminus A) \cup (A \setminus A^*)$ on ait

$$\mathbf{P}(A^* \circ A) = \mathbf{P}_1(A^* \circ A) = 0.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné au § 2 du chapitre I, toute mesure gaussienne $\mathbf{P}$ est donnée par sa valeur moyenne $a(t)$, $t \in T$, et sa fonction de corrélation $B(s, t)$, s, $t \in T$. Pour juger de l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ il est tout naturel de partir des valeurs moyennes $a(t)$, $a_1(t)$ et des fonctions de corrélation $B(s, t)$, $B_1(s, t)$ des distributions gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ respectives.

Il est évident que, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $a(t) \equiv 0$, car il est toujours possible de passer des grandeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ aux grandeurs $\xi(t) - a(t)$, $t \in T$, un tel passage gardant inchangées la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ et les mesures gaussiennes initiales $\mathbf{P}(d\omega)$ et $\mathbf{P}_1(d\omega)$. Dans l'espace fonctionnel correspondant X ceci signifie que l'on passe aux distributions gaussiennes $\mathbf{P}(dx)$ et $\mathbf{P}_1(dx)$ conservant les fonctions de corrélation initiales et ayant pour valeurs moyennes 0 et $a_1(t) - a(t)$, $t \in T$.

2. Exemples de distributions orthogonales. Soit $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, un processus gaussien stationnaire, par rapport à la mesure de probabilité $\mathbf{P}$, de moyenne nulle et de fonction de correlation $B(t)$. Soit $\mathbf{P}_1$ une autre mesure de probabilité par rapport à laquelle $\xi(t)$ est également un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle, mais de fonction de corrélation $B_1(t)$. On considère ces deux mesures sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ engendrée par toutes les $\xi(t) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, où $T = [0, \tau]$ est un segment de droite réelle.

On peut construire des exemples simples de mesures de probabilité orthogonales $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ en s'adressant aux propriétés locales des trajectoires (voir § 7 du chapitre I).

Si, par exemple,

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h B_1(0)} = \infty \qquad (3.1.9)$$

*) Voir, par exemple, [8], page 127.

ou

$$\varliminf_{h\to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h B_1(0)} = 0,$$

les mesures de probabilité **P** et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales.

En effet, en supposant observée la seconde des conditions (3.1.9), par exemple, et choisissant une fonction $\delta(h)$ telle que pour $h \to 0$ on ait

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{\delta(h)} = 0$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B_1(0)}{\delta(h)} = \infty,$$

pout t donné, on a avec une probabilité égale à 1 les relations suivantes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\Delta_h \xi(t)|}{\delta^{1/2}(h)} = \begin{cases} 0 & \text{par rapport à } \mathbf{P}, \\ \infty & \text{par rapport à } \mathbf{P}_1, \end{cases}$$

pour une suite $h = h_n$, $n = 1, 2, \ldots$ décroissant suffisamment rapidement (rappelons ici que $\Delta_{-h}\Delta_h B(0) = \mathbf{M}[\Delta_h \xi(t)]^2$). On voit que les mesures de probabilité **P** et $\mathbf{P}_1$ ont des porteurs A et A_1 disjoints de la forme

$$A = \left\{ \omega : \lim_{h=h_n\to 0} \frac{|\Delta_h \xi(\omega, t)|}{\delta^{1/2}(h)} = 0 \right\}$$

et

$$A_1 = \left\{ \omega : \lim_{h=h_n\to 0} \frac{|\Delta_h \xi(\omega, t)|}{\delta^{1/2}(h)} = \infty \right\}.$$

Ainsi,

les mesures de probabilité **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales lorsque n'est pas observée la condition* *)

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h B_1(0)} \asymp 1. \tag{3.1.10}$$

Compte tenu des propriétés des trajectoires décrites dans le théorème 5 du chapitre I, on peut obtenir des exemples assez généraux de distributions orthogonales **P** et $\mathbf{P}_1$.

Posons

$$b(t) = B(t) - B_1(t).$$

*) La relation $\alpha \asymp \beta$ pour les variables α et β signifie que $0 < c_1 \leqslant \alpha/\beta \leqslant c_2 < \infty$ pour certaines constantes c_1 et c_2.

Pour plus de simplicité supposons vérifiée la relation (3.1.10). Nous allons montrer que

si la condition

$$\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0) = o\,\{\Delta_{-h}\Delta_h B\,(0)\} \tag{3.1.11}$$

n'est pas vérifiée, les mesures gaussiennes **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales.*

En effet, en vertu du théorème 5 du chapitre I les grandeurs

$$\eta(h) = \left[1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{[\Delta_h\xi\,(kh)]^2}{\Delta_{-h}\Delta_h B\,(0)}\right]\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B\,(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)} =$$

$$\left[1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{[\Delta_h\xi\,(kh)]^2}{\Delta_{-h}\Delta_h B_1\,(0)}\right]\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B_1\,(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)} + 1$$

$$(\text{où } N = [\tau/h])$$

sont telles que pour une suite $h = h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, décroissant suffisamment rapidement et satisfaisant à la condition

$$\frac{\Delta_{-h}\Delta_h B\,(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)} \asymp \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B_1\,(0)}{\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)} \asymp 1,$$

on a avec une probabilité égale à l'unité

$$\lim_{h\to 0}\eta(h) = \begin{cases} 0 \text{ par rapport à } \mathbf{P}, \\ 1 \text{ par rapport à } \mathbf{P}_1. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

On voit que si la condition (3.1.11) n'est pas vérifiée les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales.

Nous allons montrer encore que

les mesures gaussiennes **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales si n'est pas vérifiée la condition*

$$\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0) = O\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{k,\,j=0}^{N-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B\,((k-j)\,h)]^2\right\}^{1/2}. \tag{3.1.13}$$

En effet, les grandeurs $\eta\,(h)$ décrites ci-dessus ont par rapport aux distributions **P** et $\mathbf{P}_1$ les moyennes égales à 0 et 1, et les variances respectives (voir formule (1.7.14)) sont

$$\frac{\dfrac{2}{N^2}\displaystyle\sum_{k,\,j=0}^{N-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B\,((k-j)\,h)]^2}{[\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)]^2} \quad\text{et}\quad \frac{\dfrac{2}{N^2}\displaystyle\sum_{k,\,j=0}^{N-1}[\Delta_{-h}\Delta_h B_1\,((k-j)\,h)]^2}{[\Delta_{-h}\Delta_h b\,(0)]^2},$$

de telle sorte que si la condition (3.1.13) n'est pas observée on peut trouver une suite $h = h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, vérifiant les relations

limites (3.1.12). Dans ce cas les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ ont des porteurs disjoints de la forme

$$A = \{\omega: \lim_{h_n \to 0} \eta(\omega, h_n) = 0\}$$

et

$$A_1 = \{\omega: \lim_{h_n \to 0} \eta(\omega, h_n) = 1\}.$$

Rappelons que, dans le lemme 4 du chapitre I on donne une estimation de l'expression $\sum_{k, j=0}^{N-1} [\Delta_{-h}\Delta_h B((k-j)h)]^2$. Compte tenu de cette estimation et des résultats obtenus ci-dessus il vient que

les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales si ne sont pas vérifiées les conditions suivantes :*

$$\Delta_{-h}\Delta_h b(0) = O\{|h|^{1/2} |\Delta_{-h}\Delta_h B(0)|\} \tag{3.1.14}$$

dans le cas où

$$\frac{h}{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)} = O(1), \tag{3.1.15}$$

et

$$\Delta_{-h}\Delta_h b(0) = O\{h [\Delta_{-h}\Delta_h B(0)]^{1/2}\} \tag{3.1.16}$$

dans le cas contraire.

A partir de (3.1.14), (3.1.16) on peut trouver des conditions spectrales pour lesquelles les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales. Soit $\xi(t)$ un processus stationnaire de densité spectrale $f(\lambda)$ par rapport à $\mathbf{P}$ et $f_1(\lambda)$ par rapport à $\mathbf{P}_1$. Dans ce cas (voir chapitre I, § 7, point 1) sous la condition

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) |\lambda|^{\alpha} = 0 \tag{3.1.17}$$

la grandeur $\Delta_{-h}\Delta_h B(0)$ est telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h B(0)}{h^{\alpha-1}} = 0,$$

et sous la condition

$$\lim_{\lambda \to \infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] |\lambda|^{\beta} = \infty \tag{3.1.18}$$

avec $f(\lambda) \geqslant f_1(\lambda)$, la grandeur $\Delta_{-h}\Delta_h b(0)$ satisfait à la relation

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{-h}\Delta_h b(0)}{|h|^{\beta-1}} = \infty.$$

On voit que pour $\beta \leqslant \alpha + \frac{1}{2}$ la condition

$$\Delta_{-h}\Delta_h b(0) = O\{|h|^{1/2} |h|^{\alpha-1}\},$$

et d'autant plus (3.1.14) cessent d'être vérifiées. Par conséquent *pour les densités spectrales* $f(\lambda)$ *et* $f_1(\lambda)$ *satisfaisant aux conditions* (3.1.17) *et* (3.1.18) *avec* $1 < \alpha \leqslant 2$ *et* $\beta \leqslant \alpha + \frac{1}{2}$, *les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales.*

Pour conclure nous allons envisager encore un exemple de mesures orthogonales $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ dont les fonctions de corrélation $B(t)$ et $B_1(t)$ satisfont aux conditions du théorème 6 du chapitre I, les dérivées $B'(t)$ et $B_1'(t)$ faisant des sauts de grandeur différente en un point t de l'intervalle $T = (0, \tau)$:

$$B'(t-0) - B'(t+0) \neq B_1'(t-0) - B_1'(t+0)$$

(à la page 121 le lecteur trouvera des exemples de fonctions de corrélation de ce genre). En vertu du théorème 6 du chapitre I dans ce cas les porteurs disjoints des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont les ensembles

$$A = \{\omega : \lim_{h_n \to 0} \eta(\omega, h_n) = B'(t-0) - B'(t+0)\}$$

et

$$A_1 = \{\omega : \lim_{h_n \to 0} \eta(\omega, h_n) = B_1'(t-0) - B_1'(t+0)\},$$

où

$$\eta(h) = h^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_h \xi(kh) \Delta_h \xi(t+kh)$$

et h_n, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite décroissant assez rapidement.

3. Notions de base sur les distributions gaussiennes équivalentes. Soient $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, un processus gaussien stationnaire,

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda) \tag{3.1.19}$$

sa représentation spectrale et $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ engendrée par les grandeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ sur Ω, le paramètre t parcourant un certain ensemble T de la droite réelle. Supposons que la valeur moyenne de ce processus stationnaire est nulle et que la mesure spectrale est $F(d\lambda)$. Soit $\mathbf{P}_1$ une autre mesure de probabilité par rapport à laquelle on a un autre processus stationnaire $\xi_1(t)$ de valeur moyenne nulle et de mesure spectrale $F_1(d\lambda)$:

$$\xi_1(t) = \xi(t) - a(t),$$

$a(t)$ étant la valeur moyenne des grandeurs initiales $\xi(t)$, soit

$$a(t) = \mathbf{M}_1 \xi(t), \quad t \in T.$$

Lors de l'étude des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ on peut passer des variables initiales (3.1.19) à leurs combinaisons linéaires de la forme

$$\eta(\varphi) = \int \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{3.1.20}$$

où

$$\varphi(\lambda) = \sum_k c_k e^{i\lambda t_k}, \tag{3.1.21}$$

$t_1, \ldots, t_n \in T$, et $c_1, \ldots, c_n$ sont des coefficients réels.

Désignons par L_T^0 l'espace linéaire de toutes les fonctions $\varphi(\lambda)$ de la forme (3.1.21). Les grandeurs $\eta(\varphi)$, $\varphi \in L_T^0$, représentables par la formule (3.1.20) peuvent être considérées comme une fonctionnelle gaussienne dans l'espace L_T^0. Posons

$$a(\varphi) = \mathbf{M}_1 \eta(\varphi), \quad \varphi \in L^0{}_T. \tag{3.1.22}$$

Notons que $a(\varphi) = \sum_k c_k a(t_k)$ pour $\varphi(\lambda) = \sum_k c_k e^{i\lambda t_k}$.

Considérons L_T^0 comme un sous-espace de l'espace hilbertien $L_T(F)$ de produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_F = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \overline{\psi(\lambda)}\, F(d\lambda), \tag{3.1.23}$$

$F(d\lambda)$ étant la mesure spectrale du processus stationnaire $\xi(t)$ par rapport à la distribution $\mathbf{P}$. Rappellons que $L_T(F)$ est la fermeture de l'espace L_T^0 par rapport au produit scalaire (3.1.23). En même temps nous allons envisager L_T^0 comme un sous-espace dans l'espace hilbertien $L_T(F_1)$ de produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle_{F_1}$, $F_1(d\lambda)$ étant ici la mesure spectrale du processus stationnaire $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$ par rapport à la distribution $\mathbf{P}_1$.

La fonctionnelle aléatoire $\eta(\varphi)$ du paramètre fonctionnel $\varphi(\lambda) \in L_T^0$ donnée par la formule (3.1.20) a pour fonction de corrélation

$$B(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle_F, \quad \varphi, \psi \in L_T^0, \tag{3.1.24}$$

par rapport à la distribution $\mathbf{P}$ et

$$B_1(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle_{F_1}, \quad \varphi, \psi \in L_T^0, \tag{3.1.25}$$

par rapport à la distribution $\mathbf{P}_1$.

Il est évident que si pour une certaine fonction $\varphi(\lambda) \in L_T^0$ on a $\|\varphi\|_F = 0$, mais $\|\varphi\|_{F_1} \neq 0$, les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales car

$$\mathbf{P}\{\eta(\varphi) = 0\} = 1, \quad \mathbf{P}_1\{\eta(\varphi) = 0\} = 0. \tag{3.1.26}$$

De plus

les mesures de probabilité $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales quand n'est pas vérifiée la condition* *)

$$\| \varphi \|_F \asymp \| \varphi \|_{F_1}, \qquad \varphi \in L_T^0. \qquad (3.1.27)$$

En effet, si par exemple existe la suite $\varphi_n(\lambda) \in L_T^0$, $n = 1, 2, \ldots$, telle que

$$\| \varphi_n \|_F^2 = 1, \quad \sigma_n^2 = \| \varphi_n \|_{F_1}^2 \to 0 \text{ pour } n \to \infty,$$

on a

$$\mathbf{P}\{ | \eta(\varphi_n) - a(\varphi_n) | < \sqrt{\sigma_n} \} = \int\limits_{|x - a(\varphi_n)| < \sqrt{\sigma_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx \to 0,$$

$$\mathbf{P}_1\{ | \eta(\varphi_n) - a(\varphi_n) | < \sqrt{\sigma_n} \} = \int\limits_{|x| < \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx \to 1.$$

On obtient des relations analogues dans le cas où

$$\| \varphi_n \|_{F_1}^2 = 1, \quad \| \varphi_n \|_F^2 \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty,$$

de sorte que (voir la condition (3.1.5)) les mesures de probabilité $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales.

La condition (3.1.27) signifie en particulier que les espaces hilbertiens $L_T(F)$ et $L_T(F_1)$ coïncident :

$$L_T(F) = L_T(F_1),$$

la relation (3.1.27) étant vérifiée pour tous les $\varphi(\lambda) \in L_T(F)$ $(\varphi \in L_T(F_1))$.

Puis nous allons considérer la valeur moyenne (3.1.22) de la fonctionnelle aléatoire $\eta(\varphi)$, $\varphi \in L_T^0$, par rapport à la mesure de probabilité $\mathbf{P}_1$.

Il est évident que si $a(\varphi) \neq 0$ pour $\| \varphi \|_F = 0$, les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales, car soit $\| \varphi \|_{F_1} \neq 0$ et les relations (3.1.26) sont vérifiées, soit $\| \varphi \|_{F_1} = 0$ et alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta(\varphi) = a(\varphi)\} &= 0, \\ \mathbf{P}_1\{\eta(\varphi) = a(\varphi)\} &= 1. \end{aligned} \qquad (3.1.28)$$

Ceci signifie que pour des mesures non orthogonales la valeur moyenne $a(\varphi)$, $\varphi \in L_T^0$, est une fonctionnelle linéaire dans l'espace hilbertien $L_T(F)$. Nous allons montrer que

pour des mesures non orthogonales $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *la valeur moyenne* $a(\varphi)$, $\varphi \in L_T^0$, *est une fonctionnelle linéaire bornée dans l'espace hilbertien* $L_T(F)$.

---

*) Rappelons que la relation $\| \varphi \|_F \asymp \| \varphi \|_{F_1}$ signifie $0 \leqslant c_1 \leqslant \| \varphi \|_F / \| \varphi \|_{F_1} \leqslant c_2 < \infty$, où c_1 et c_2 sont des constantes.

En effet, on peut considérer que la condition (3.1.27) est remplie, alors dans ce cas, si $a(\varphi_n) \to \infty$ pour $n \to \infty$ pour une suite $\varphi_n(\lambda) \in L_T^0$ telle que $\sigma_n = \|\varphi_n\|_{F_1} \asymp \|\varphi_n\|_F = 1$, on a

$$\mathbf{P}\{\eta(\varphi_n) > \sqrt{a(\varphi_n)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{a(\varphi_n)}}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \to 0,$$

$$\mathbf{P}_1\{\eta(\varphi_n) > \sqrt{a(\varphi_n)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_{-a(\varphi_n)+\sqrt{a(\varphi_n)}}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_n^2}\,dx \to 1$$

et ceci signifie que les mesures **P** et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales (voir la condition (3.1.5)).

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L_T^0$ une suite quelconque de fonctions, complète tant dans l'espace hilbertien $L_T(F)$ que dans l'espace hilbertien $L_T(F_1)$ (rappelons que le sous-espace L_T^0 de toutes les fonctions de la forme (3.1.21) est dense partout tant dans $L_T(F)$ que dans $L_T(F_1)$), et soit $\mathfrak{A}$ la σ-algèbre engendrée par toutes les grandeurs $\eta_k = \eta(\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, de la forme (3.1.20).

L e m m e 1. *Les mesures gaussiennes* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ si et seulement si elles sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}(T)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que **P** et $\mathbf{P}_1$ soient équivalentes sur $\mathfrak{A}$. Chaque élément $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$ dans l'espace $L_T(F)$ est la limite des combinaisons linéaires de la forme $\psi_n(\lambda) = \sum_k c_{kn}\varphi_k(\lambda)$, et par conséquent pour $n \to \infty$

$$\mathbf{M}\,|\xi(t) - \eta(\psi_n)|^2 = \|e^{i\lambda t} - \psi_n(\lambda)\|_F^2 \to 0.$$

Pour les mesures **P** et $\mathbf{P}_1$ équivalentes la condition (3.1.27) se trouve vérifiée et la valeur moyenne $a(\varphi)$ est une fonctionnelle linéaire continue de sorte que

$$\mathbf{M}_1\,|\xi(t) - \eta(\psi_n)|^2 = \|e^{i\lambda t} - \psi_n(\lambda)\|_{F_1}^2 + |a(e^{i\lambda t}) - a(\psi_n)|^2 \to 0.$$

Par conséquent, pour une suite n_k, $k = 1, 2, \ldots$, croissant suffisamment rapidement on a

$$\xi(\omega, t) \doteq \lim_{n\to\infty} \eta(\omega, \psi_{n_k})$$

presque partout tant par rapport à la mesure de probabilité **P**, que par rapport à $\mathbf{P}_1$. Il est évident que les grandeurs $\tilde{\xi}(\omega, t)$, définies d'une part par la relation limite

$$\tilde{\xi}(\omega, t) = \lim_{k\to\infty} \eta(\omega, \psi_{n_k})$$

pour les $\omega \in \Omega$ pour lesquels la limite mentionnée existe et d'autre part par l'égalité $\tilde{\xi}(\omega, t) = 0$ pour les autres $\omega \in \Omega$, seront équiva-

lentes aux grandeurs initiales $\xi(\omega, t)$ au sens de la condition (3.1.7). Ces grandeurs sont mesurables par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}^*$ qui complète la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ initiale par des ensembles de probabilité 0 (par rapport aux distributions $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ équivalentes sur $\mathfrak{A}$). Il est clair que les mesures de probabilité $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ seront équivalentes sur $\mathfrak{A}^*$ et d'autant plus sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_{\tilde{\xi}}$ engendrée par les $\tilde{\xi}(t)$, $t \in T$. Compte tenu de la relation (3.1.7) on voit que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ seront équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\mathfrak{A}$ la σ-algèbre engendrée par les grandeurs $\eta_k(\omega) = \eta(\omega, \varphi_k)$ sur Ω, où $\varphi_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots$, est un système quelconque de fonctions de L_T^0, complet dans les espaces $L_T(F)$ et $L_T(F_1)$. Soit $\mathfrak{A}_n$ la σ-algèbre engendrée seulement par les grandeurs η_k, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Il est évident que $\mathfrak{A}$ est la σ-algèbre minimale, contenant toute la suite $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$, ce qui symboliquement peut s'écrire comme

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}_n.$$

Considérons les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$. Soit

$$p(\omega) = \frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)}$$

leur densité sur $\mathfrak{A}$.

Les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont évidemment équivalentes sur toute σ-algèbre $\mathfrak{A}'$ contenue dans $\mathfrak{A}$, et pour la densité correspondante $p'(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ (mesurable par rapport à $\mathfrak{A}'$) on a

$$\mathbf{P}_1(A') = \int_{A'} p'(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) = \int_{A'} p(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$$

quel que soit l'ensemble $A' \in \mathfrak{A}'$. On voit que la densité $p'(\omega)$ coïncide avec l'espérance mathématique conditionnelle $p(\omega)$ (par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}'$):

$$p'(\omega) = \mathbf{M}\{p(\omega)/\mathfrak{A}'\}. \tag{3.1.29}$$

En vertu des propriétés bien connues des espérances mathématiques conditionnelles *), pour les densités $p_n(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ et sur les σ-algèbres $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$ représentables sous la forme

$$p_n(\omega) = \mathbf{M}\{p(\omega)/\mathfrak{A}_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.30}$$

avec une probabilité égale à l'unité on a

$$p(\omega) = \lim_{n\to\infty} p_n(\omega) \tag{3.1.31}$$

*) Voir, par exemple, [12].

(la relation limite (3.1.31) se trouvant vérifiée, également en moyenne). Considérons une densité arbitraire $p'(\omega)$ de la forme (3.1.29). En utilisant l'inégalité bien connue *), pour la fonction convexe $\log x$ on a

$$\log p'(\omega) = \log \mathbf{M}\,\{p(\omega)/\mathfrak{A}'\} \geqslant \mathbf{M}\,\{\log p(\omega)/\mathfrak{A}'\}$$

et par conséquent

$$\mathbf{M} \log p' \geqslant \mathbf{M} \log p. \tag{3.1.32}$$

En vertu de cette inégalité générale, pour une suite de densités du type (3.1.30) on obtient

$$\mathbf{M} \log p_1 \geqslant \mathbf{M} \log p_2 \geqslant \ldots$$

Comme $\mathbf{M} \log p_n \geqslant \mathbf{M} \log p$, avec $\mathbf{M} \log p > -\infty$ il existe pour la suite monotone $\mathbf{M} \log p_n$, $n = 1, 2, \ldots$, la limite finie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n. \tag{3.1.33}$$

Ci-dessous nous montrerons (voir théorème 1) qu'effectivement on a $\mathbf{M} \log p > -\infty$.

Ainsi, la densité $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ (donc également sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$) peut être obtenue (et nous le ferons plus loin) à partir d'une relation limite de la forme

$$\log p(\omega) = \lim_{n\to\infty} \log p_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n(\omega) + \lim_{n\to\infty} [\log p_n(\omega) - \mathbf{M} \log p_n(\omega)]. \tag{3.1.34}$$

§ 2. Conditions d'équivalence des mesures gaussiennes

1. Conditions d'équivalence liées à l'entropie des distributions. Considérons les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ engendrée par toutes les grandeurs $\eta(\varphi) = \varphi(\omega, \varphi)$ de la forme (3.1.20) sur l'espace de probabilité Ω, où le paramètre fonctionnel $\varphi(\lambda)$ parcourt l'espace linéaire L_T^0. Nous allons supposer remplie la condition (3.1.27), lorsqu'elle cesse de l'être les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales.

Soit $\eta_k = \eta(\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, une suite de grandeurs de la forme (3.1.20), où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L_T^0$ est un système complet de fonctions linéairement indépendantes dans chacun des espaces hilbertiens $L_T(F)$ et $L_T(F_1)$ et soit $\mathfrak{A}$ la σ-algèbre engendrée par toutes ces grandeurs. Sur chacune des σ-algèbres $\mathfrak{A}_n$ engendrées par les grandeurs $\eta_k = \eta_k(\omega)$ sur Ω, $k = 1, \ldots, n$, les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$

*) Voir [12].

et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes du fait que, la condition (3.1.27) étant supposée vérifiée, les matrices de corrélation correspondantes $\{B(k, j)\}$ et $\{B_1(k, j)\}$ sont régulières.

Considérons la mesure gaussienne $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ engendrée par tous les ensembles de la forme

$$A = \{[\eta_1, \ldots, \eta_n] \in \Gamma\},$$

où Γ sont des ensembles de Borel de l'espace vectoriel R^n à n dimensions. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ la valeur moyenne par rapport à la mesure de probabilité $\mathbf{P}_1$, c'est-à-dire $a_k = \mathbf{M}_1\eta(\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ On a alors

$$\mathbf{P}_1(A) = \int_{R^n} f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n,$$

où $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, densité de la distribution gaussienne correspondante dans l'espace R^n des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$, s'écrit

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum (x_k - a_k)(x_j - a_j) C_1(k, j)\right\}.$$

D désigne ici le déterminant de la mitrice $\{B_1(k, j)\}$, et $\{C_1(k, j)\}$ est la matrice inverse de $\{B_1(k, j)\}$.

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ la densité de la distribution correspondante $\mathbf{P}$ dans l'espace vectoriel R^n (ayant la même forme que la densité $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ mais de valeur moyenne nulle et de matrice de corrélation $\{B(k, j)\}$. La densité des distributions est alors

$$\frac{\mathbf{P}_1(dx)}{\mathbf{P}(dx)} = \frac{f_1(x_1, \ldots, x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}, \qquad x \in R^n.$$

Par conséquent, la densité correspondante $p_n(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur l'espace initial Ω est

$$p_n(\omega) = \frac{f_1[\eta_1(\omega), \ldots, \eta_n(\omega)]}{f[\eta_1(\omega), \ldots, \eta_n(\omega)]};$$

on peut la décrire par la formule suivante:

$$\log p_n(\omega) = \log \frac{D}{D_1} - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{n} [C_1(j, k)(\eta_j(\omega) - a_j)(\eta_k(\omega) - a_k) - \\ - C(j, k)\eta_j(\omega)\eta_k(\omega)], \qquad (3.2.1)$$

D et D_1 désignant les déterminants des matrices $\{B(j, k)\}$ et $\{B_1(j, k)\}$, $k, j = 1, \ldots, n$, et $\{C(j, k)\}$, $\{C_1(j, k)\}$ les matrices inverses de $\{B(j, k)\}$ et $\{B_1(j, k)\}$.

Dans le sous-espace engendré par les éléments $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ on peut trouver une base $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn}$ dans laquelle les deux formes bilinéaires positives $B(\varphi, \psi)$ et $B_1(\varphi, \psi)$ se ramènent à une forme diagonale, soit:

$$B(\varphi_{kn}, \varphi_{jn}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = j, \\ 0 & \text{pour } k \neq j; \end{cases}$$

$$B_1(\varphi_{kn}, \varphi_{jn}) = \begin{cases} \sigma_{kn}^2 & \text{pour } k = j, \\ 0 & \text{pour } k \neq j. \end{cases}$$

La densité $p_n(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ est alors donnée par la formule suivante [comparer avec (3.2.1)]:

$$p_n(\omega) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \sigma_{kn}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(\eta_{kn}(\omega) - a_{kn})^2}{\sigma_{kn}^2} - \eta_{kn}^2(\omega)\right]\right\}, \tag{3.2.2}$$

avec

$$\eta_{kn} = \eta(\varphi_{kn}), \quad a_{kn} = \mathbf{M}_1\eta(\varphi_{kn}),$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \log p_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{1}{\sigma_{kn}^2} - \frac{1}{\sigma_{kn}^2} + 1 - \frac{a_{kn}^2}{\sigma_{kn}^2}\right), \\ \mathbf{M}_1 \log p_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-\log\sigma_{kn}^2 + \sigma_{kn}^2 - 1 + a_{kn}^2), \\ \mathbf{D} \log p_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\sigma_{kn}^2)^2 + 2a_{kn}^2}{\sigma_{kn}^4}, \\ \mathbf{D}_1 \log p_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(1-\sigma_{kn}^2)^2 + 2\sigma_{kn}^2 a_{kn}^2], \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$\mathbf{D}\eta$ et $\mathbf{D}_1\eta$ désignant les variances par rapport à $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$.

Définissons sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ la *distance entropique* $r(\mathfrak{A}')$ entre les mesures gaussiennes équivalentes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$:

$$r(\mathfrak{A}') = -\left[\mathbf{M}\log\frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)} + \mathbf{M}_1\log\frac{\mathbf{P}(d\omega)}{\mathbf{P}_1(d\omega)}\right]. \tag{3.2.4}$$

En vertu de l'inégalité générale (3.1.32) on a

$$r(\mathfrak{A}') \leqslant r(\mathfrak{A}'') \text{ pour } \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}''. \tag{3.2.5}$$

Posons $r_n = r(\mathfrak{A}_n)$. Comme $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$, la suite r_n, $n = 1, 2, \ldots$, est monotone croissante.

On tire des formules (3.2.3) que si

$$\inf_{k,n} \sigma_{kn}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sup_{k,n} \sigma_{kn}^2 = \infty, \tag{3.2.6}$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty. \tag{3.2.7}$$

Si au contraire

$$\sigma_{kn}^2 \asymp 1, \tag{3.2.8}$$

ce qui de toute évidence équivaut à (3.1.27), on a alors

$$-\log \frac{1}{\sigma_{kn}^2} + \frac{1}{\sigma_{kn}^2} - 1 \asymp -\log \sigma_{kn}^2 + \sigma_{kn}^2 - 1 \asymp (1 - \sigma_{kn}^2)^2$$

et donc

$$\mathbf{M}[-\log p_n] \asymp \mathbf{M}_1 \log p_n \asymp \mathbf{D} \log p_n \asymp \mathbf{D}_1 \log p_n \asymp$$
$$\asymp r_n \asymp \sum_{k=1}^{n} [(1 - \sigma_{kn}^2)^2 + a_{kn}^2]. \tag{3.2.9}$$

L e m m e 2. *Si la relation* (3.2.7) *est vérifiée les mesures* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}$ *sont orthogonales.*

D é m o n s t r a t i o n. Le cas où la relation (3.2.6) est vérifiée a déjà été étudié ci-dessus (voir la condition (3.1.27)). Nous avons montré que dans ce cas les mesures de probabilité **P** et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales.

Supposons vérifiée la relation (3.2.8) (ainsi que (3.2.9)). Pour une suite d'ensembles $A_n \in \mathfrak{A}_n$ de la forme

$$A_n = \left\{\log p_n - \mathbf{M} \log p_n \geqslant \frac{1}{2} r_n\right\} = \Omega \setminus \left\{-\log p_n + \right.$$
$$\left. + \mathbf{M}_1 \log p_n \geqslant \frac{1}{2} r_n\right\}$$

on a en vertu de l'inégalité de Tchébychev les relations limites suivantes:

$$\mathbf{P}(A_n) \leqslant \frac{\mathbf{D} \log p_n}{\frac{1}{4} r_n^2} \asymp \frac{1}{r_n} \to 0$$

et

$$\mathbf{P}_1(A_n) = 1 - \mathbf{P}_1(\Omega - A_n) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}_1 \log p_n}{\frac{1}{4} r_n^2} \asymp 1 - \frac{1}{r_n} \to 1,$$

ce qui montre que (voir la condition (3.1.5)) les mesures de probabilité **P** et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales. Le lemme se trouve ainsi démontré.

L e m m e 3. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} r_n < \infty \tag{3.2.10}$$

les mesures de probabilité **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont équivalentes sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par exemple, que la mesure $\mathbf{P}_1$ ne soit pas absolument continue par rapport à **P**. Ceci signifie que pour un ensemble $A \in \mathfrak{A}$ on a

$$\mathbf{P}(A) = 0, \quad \mathbf{P}_1(A) \neq 0.$$

Il est évident qu'il existe une suite d'ensembles $A_n \in \mathfrak{A}_n$ tels que $\mathbf{P}_2(A \circ A_n) \to 0$ pour $n \to \infty$ avec $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P} + \mathbf{P}_1$ et par conséquent pour ces ensembles on a

$$\mathbf{P}(A \circ A_n) \to 0, \quad \mathbf{P}_1(A \circ A_n) \to 0.$$

Considérons la σ-algèbre $\mathfrak{A}'_n$ contenant en plus de l'ensemble vide et de tout l'espace seulement l'ensemble A_n et son complémentaire. La densité $p'_n(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur $\mathfrak{A}'_n$ est égale à $\frac{\mathbf{P}_1(A_n)}{\mathbf{P}(A_n)}$ pour $\omega \in A_n$ et à $\frac{1-\mathbf{P}_1(A_n)}{1-\mathbf{P}(A_n)}$ pour $\omega \notin A_n$, et

$$\mathbf{M}_1 \log p'_n = \log \frac{\mathbf{P}_1(A_n)}{\mathbf{P}(A_n)} \mathbf{P}_1(A_n) + \log \frac{1-\mathbf{P}_1(A_n)}{1-\mathbf{P}(A_n)} [1-\mathbf{P}_1(A_n)].$$

Comme $\mathbf{P}_1(A_n) \to \mathbf{P}_1(A) > 0$ et $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A) = 0$, on a $\mathbf{M}_1 \log p'_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. En vertu de l'inégalité générale (3.1.32) on a

$$-\mathbf{M}_1 \log p'_n \leqslant -\mathbf{M}_1 \log p_n \leqslant r_n,$$

où comme précédemment $p_n(\omega) = \frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)}$ désigne la densité sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n \supseteq \mathfrak{A}'_n$. Ainsi, si la mesure $\mathbf{P}_1$ n'est pas absolument continue par rapport à **P**, on a $r_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. Des raisonnements analogues donnent le même résultat quant à la mesure **P** qui n'est pas absolument continue par rapport à $\mathbf{P}_1$. Par conséquent, sous la condition (3.2.10) les mesures **P** et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$, ce qu'il fallait démontrer.

Les lemmes 2 et 3 démontrés ci-dessus conduisent au résultat suivant *).

T h é o r è m e 1. *Les mesures gaussiennes* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont soit équivalentes, soit orthogonales; pour qu'elles soient équivalentes sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$ *il faut et il suffit que soit vérifiée la condition* (3.2.10).

---

*) Ce résultat a été obtenu par J. Hajek: « *Sur une des propriétés des répartitions normales d'un processus stochastique arbitraire* ». Revue mathématique tchécoslovaque, 8 (1958), pp. 610-618.

Soit $\mathbf{P}_1^0$ une mesure gaussienne d'espérance mathématique nulle et de même fonction de corrélation que $\mathbf{P}_1$. Le théorème 1 et la relation (3.2.9) permettent de déduire la propriété importante suivante.

Théorème 2. *Pour que les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes il faut et il suffit que le soient les couples* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1^0$, $\mathbf{P}_1^0$ *et* $\mathbf{P}_1$, *la densité* $\mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ *des mesures équivalentes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *étant*

$$\frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)}=\frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}_1^0(d\omega)}\,\frac{\mathbf{P}_1^0(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)}\,. \tag{3.2.11}$$

(Rappelons que nous envisageons le cas où $\mathbf{P}=\mathbf{P}^0$.)

2. Conditions d'équivalence liées aux espaces hilbertiens $L_T(F)$ et $L_T(F_1)$.

Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ des mesures gaussiennes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ engendrée par toutes les grandeurs $\eta(\varphi)$ de la forme (3.1.20), où le paramètre fonctionnel $\varphi(\lambda)$ parcourt l'espace L_T^0. Le théorème 2 permet d'envisager séparément deux cas. Dans le premier cas coïncident les fonctions de corrélation $B(\varphi, \psi)=\langle\varphi, \psi\rangle_F$ et $B_1(\varphi, \psi)=$ $=\langle\varphi, \psi\rangle_{F_1}$ pour tous les $\varphi, \psi \in L_T^0$:

$$\langle\varphi, \psi\rangle_F=\langle\varphi, \psi\rangle_{F_1}. \tag{3.2.12}$$

Dans le second cas la valeur moyenne $\mathbf{M}_1\eta(\varphi)$ est nulle.

Commençons par le premier cas quand les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ ne diffèrent que par leur valeur moyenne:

$$\mathbf{M}\eta(\varphi)=0, \quad \mathbf{M}_1\eta(\varphi)=a(\varphi), \quad \varphi \in L_T^0.$$

Théoreme 3. *Sous la condition* (3.2.12) *les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sont équivalentes si et seulement si la valeur moyenne* $a(\varphi)$ *est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace hilbertien* $L_T(F)$:

$$a(\varphi)=\langle\varphi, \psi\rangle_F, \quad \varphi \in L_T^0, \tag{3.2.13}$$

où $\psi(\lambda)$ *est un élément donné de* $L_T(F)$.

Démonstration. Dire que la fonctionnelle linéaire $a(\varphi)$ dans l'espace hilbertien $L_T(F)$ est continue équivaut à dire qu'elle admet une borne, ce qui a été établi plus haut dans le cas des mesures gaussiennes (voir § 1, point 3).

Supposons que la valeur moyenne $a(\varphi)$ soit une fonctionnelle linéaire continue. Comme toute fonctionnelle linéaire continue $a(\varphi)$, $\varphi \in L_T^0$, admet la représentation (3.2.13), où l'élément $\psi(\lambda) \in$ $\in L_T(F)$ est défini d'une manière univoque car le sous-espace L_T^0 est compact dans $L_T(F)$. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L_T^0$ un système orthogonal complet dans $L_T(F)$. Comme le permettent de voir les formules (3.2.3), la distance entropique entre les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$

et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ engendrée par les grandeurs $\eta_k = \eta\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$, est

$$r_n = 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

avec $a_k = a(\varphi_k)$ et

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, \psi\rangle_F^2 = 2 \| \psi \|_F^2 < \infty.$$

La condition (3.2.10) se trouve ainsi remplie et par conséquent (voir le théorème 1) les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A} = \lim \mathfrak{A}_n$. En vertu du lemme ceci prouve l'équivalence de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Considérons maintenant des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ de mêmes valeurs moyennes, égales à zéro.

Définissons l'opérateur A de l'espace hilbertien $L_T(F)$ dans l'espace hilbertien $L_T(F_1)$ en posant

$$A\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda) \tag{3.2.14}$$

pour tous les $\varphi(\lambda) \in L_T^0$. Comme précédemment, nous allons supposer remplie la condition (3.1.27), au cas contraire les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales. Cette condition équivaut à dire que l'opérateur A admet une borne et que l'opérateur inverse en a une ; on peut également écrire cette condition comme suit :

$$A^*A \asymp E, \tag{3.2.15}$$

où A^* est l'opérateur conjugué à A, E l'opérateur unitaire et la relation (3.2.15) signifie que

$$\| (A^*A)\, \varphi \|_F \asymp \| \varphi \|_F, \quad \varphi \in L_T(F).$$

Pour plus de clarté remarquons que

$$\langle A^*A\varphi, \psi\rangle_F = \langle A\varphi, A\psi\rangle_{F_1} = \langle \varphi, \psi\rangle_{F_1} \tag{3.2.16}$$

pour φ, ψ quelconques.

Considérons la différence

$$\Delta = E - A^*A. \tag{3.2.17}$$

L e m m e 4. *Si l'opérateur* Δ *est complètement continu, la condition* (3.2.15) *et avec elle la condition* (3.1.27) *sont vérifiées si et seulement si l'opérateur* Δ *n'admet pas l'unité comme valeur propre.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que la condition (3.2.15) équivaut à dire que l'opérateur A^*A admet une borne de même que l'opérateur inverse $(A^*A)^{-1}$.

L'opérateur A^*A étant positif, la différence $\Delta = E - A^*A$ est telle que

$$\delta = \sup_{\|\varphi\|_F = 1} \langle \Delta\varphi, \varphi \rangle \leqslant 1.$$

On a

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_F - \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle_F \leqslant \delta \langle \varphi, \varphi \rangle_F,$$
$$\langle A^*A\varphi, \varphi \rangle_F \geqslant (1 - \delta) \langle \varphi, \varphi \rangle_F.$$

Par conséquent pour $\delta \neq 1$, l'opérateur borné $(A^*A)^{-1}$ existe. D'autre part, si 1 est une valeur propre de l'opérateur $E - A^*A$, o se trouve être une valeur propre de l'opérateur A^*A et par conséquent l'opérateur inverse $(A^*A)^{-1}$ n'existe pas.

Théorème 4. *Pour que, sous la condition* (3.1.27), *les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes il faut et il suffit que* $\Delta = E - A^*A$ *soit un opérateur de Hilbert-Schmidt* *).

Démonstration. Soit la représentation spectrale de l'opérateur symétrique borné Δ :

$$\Delta = \int \mu E\,(d\mu),$$

où $E\,(d\mu)$ est une famille spectrale d'opérateurs de projection (« développement de l'unité »). Il est clair que

$$A^*A = \int (1 - \mu)\, E\,(d\mu).$$

Supposons que le spectre de l'opérateur Δ ne soit pas purement discret. Dans ce cas il existe à l'extérieur d'un voisinage $(-\varepsilon, \varepsilon)$ une infinité de points du spectre, et par conséquent un nombre infini d'intervalles disjoints $[\mu_k, \mu_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$, tels que les sous-espaces orthogonaux invariants de la forme

$$E\,[\mu_k, \mu_{k+1}]\, L_T\,(F)$$

soient tous non nuls. Choisissons dans chacun de ces sous-espaces un élément correspondant φ_k, $\|\varphi_k\|_F = 1$. On a

$$\langle A^*A\varphi_k, \varphi_j \rangle_F = \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{F_1} = \begin{cases} \sigma_k^2 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k \end{cases}$$

---

*) Rappelons ici que l'opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur complètement continu, dont le système complet de valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots$ satisfait à la condition $\sum_k \mu_k^2 < \infty$. Le théorème 4 a été formulé par Feldman [J. Feldman, *Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes*, Pacif. J. Math. 8 (1958) 699-708; 9 (1959) 1295-1296]; on peut facilement l'obtenir à partir du théorème 1, alors que la démonstration donnée par Feldman est très compliquée.

avec

$$\mu_k \leqslant 1 - \sigma_k^2 \leqslant \mu_{k+1}, \quad (1 - \sigma_k^2)^2 \geqslant \varepsilon^2.$$

La distance entropique r_n entre les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ engendrée par les grandeurs $\eta_k = \eta(\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$, est telle que (voir (3.2.9)

$$r_n \asymp \sum_{k=1}^{n} (1-\sigma_k^2)^2 \geqslant \varepsilon^2 n.$$

On voit que $r_n \to \infty$ pour $n \to \infty$ et en vertu du théorème 1 les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont orthogonales sur la σ-algèbre $\mathfrak{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}_n$

Ainsi, pour les mesures équivalentes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ le spectre de l'opérateur Δ (et donc également de l'opérateur A^*A) est purement discret. Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ est un système orthonormé complet de fonctions à valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots$, la condition

$$\sum_k \mu_k^2 < \infty \tag{3.2.18}$$

équivaut à

$$\lim_{n\to\infty} r_n \asymp \sum_{k=1}^{\infty} (1-\sigma_k^2)^2 < \infty,$$

où $\sigma_k^2 = 1 - \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$, est un système complet de valeurs propres de l'opérateur A^*A, et r_n la distance entropique entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}_n$ engendrée par les grandeurs $\eta_k = \eta(\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Ainsi (3.2.18) (avec la condition (3.1.27)) est la condition nécessaire et suffisante d'équivalence des mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Notons que la condition (3.2.18) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k,j} \langle \Delta\varphi_k, \varphi_j\rangle_F^2 < \infty$$

et que pour tout système orthonormé $\psi_1, \psi_2, \ldots \in L_T(F)$ on a

$$\sum_{k,j} \langle \Delta\psi_k, \psi_j\rangle_F^2 = \sum_k \Big[\sum_j \langle \Delta\psi_k, \psi_j\rangle_F\Big]^2 =$$
$$= \sum_k \| \Delta\psi_k \|_F^2 = \sum_k \Big[\sum_j \langle \Delta\psi_k, \varphi_j\rangle_F^2\Big] =$$
$$= \sum_j \Big[\sum_k \langle \psi_k, \Delta\varphi_j\rangle_F^2\Big] \leqslant \sum_j \| \Delta\varphi_j \|_F^2 = \sum_{k,j} \langle \Delta\varphi_k, \varphi_j\rangle_F^2,$$

notant que pour un système orthonormé complet $\psi_1, \psi_2, \ldots$ les inégalités correspondantes deviennent ici des égalités strictes.

Il est facile de voir que l'opérateur Δ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (donc le spectre est discret et le système complet de valeurs

propres satisfait à la condition (3.2.18)) si et seulement si pour un système orthonormé complet $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ quelconque on a

$$\sum_{k, j} \langle \Delta\varphi_k, \varphi_j \rangle_F^2 < \infty. \tag{3.2.19}$$

Cette condition peut s'exprimer directement par les fonctionnelles de corrélation des distributions **P** et $\mathbf{P}_1$, en effet

$$\langle \Delta\varphi, \psi \rangle_F = \langle \varphi, \psi \rangle_F - \langle A^*A\varphi, \psi \rangle_F = \\ = \langle \varphi, \psi \rangle_F - \langle \varphi, \psi \rangle_{F_1} = B(\varphi, \psi) - B_1(\varphi, \psi)$$

pour $\varphi, \psi \in L_T(F)$ quelconques. Ainsi, *sous la condition* (3.1.27) *pour assurer l'équivalence des mesures gaussiennes* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *il faut et il suffit que pour un système orthonormé complet quelconque* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \in L_T(F)$ *on ait*

$$\sum_{k, j} b(\varphi_k, \varphi_j)^2 < \infty, \tag{3.2.20}$$

où

$$b(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) - B_1(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in L_T(F).$$

Exemple. Soit $T = (-\infty, \infty)$ la droite réelle achevée. Dans ce cas $L_T(F)$ est la famille de toutes les fonctions $\varphi(\lambda)$ telles que $\int |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty$. La condition (3.1.27), signifiant en particulier que $\int_\Delta F(d\lambda) \asymp \int_\Delta F_1(d\lambda)$, équivaut à ce que les mesures spectrales F et F_1 sont équivalentes et leur densité $f(\lambda) = F_1(d\lambda)/F(d\lambda)$ satisfait à la condition $f(\lambda) \asymp 1$ pour presque tous les λ. On peut facilement trouver l'opérateur A^*A à partir de l'égalité

$$\langle A^*A\varphi, \psi \rangle_F = \langle \varphi, \psi \rangle_{F_1} = \langle f\varphi, \psi \rangle_F, \quad \varphi, \psi \in L_T(F).$$

Notamment, comme $f(\varphi) \in L_T(F)$, A^*A est l'opérateur de multiplication par la densité $f(\lambda)$. Par conséquent l'opérateur $\Delta = E - A^*A$ est celui de multiplication par la fonction $1 - f(\lambda)$. Il est évident que pour que la fonction $\varphi(\lambda)$ soit une fonction propre de l'opérateur Δ, il faut et il suffit que $\varphi(\lambda) = 0$ presque partout à l'extérieur de l'ensemble $\{\lambda: 1 - f(\lambda) = \mu\}$, où μ désigne la valeur propre correspondante. Il est facile de voir que Δ n'est un opérateur de Hilbert-Schmidt que si $1 - f(\lambda) = 0$ presque partout par rapport à la partie continue de la mesure spectrale $F(d\lambda)$ (c'est-à-dire que les parties continues des mesures spectrales F et F_1 coïncident) et que pour la partie discrète concentrée aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ on ait la condition

$$\sum_k \left[1 - \frac{F_1(\lambda_k)}{F(\lambda_k)}\right]^2 < \infty,$$

où

$$\mu_k = 1 - f(\lambda_k) = 1 - \frac{F_1(\lambda_k)}{F(\lambda_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

est un système complet de valeurs propres non nulles correspondant aux fonctions propres de la forme

$$\varphi_k(\lambda) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ pour } \lambda \neq \lambda_k \\ 1 \text{ pour } \lambda = \lambda_k \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(voir la condition (3.2.18)).

Nous allons nous arrêter plus en détail sur la condition (3.2.20) et les conséquences qui en découlent.

Considérons l'espace hilbertien $L_{T\times T}(F \times F)$ analogue à l'espace $L_T(F)$ introduit précédemment. Plus exactement, considérons l'espace linéaire $L^0_{T\times T}$ de toutes les fonctions du type

$$\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{k,j} c_{kj} e^{i(\lambda s_k - \mu t_j)}, \tag{3.2.21}$$

où s_k, $t_j \in T$ et c_{kj} sont des coefficients réels, et définissons $L_{T\times T}(F \times F)$ comme un espace hilbertien obtenu par fermeture de $L^0_{T\times T}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle\varphi, \psi\rangle_{F\times F} = \int\int \varphi(\lambda, \mu)\overline{\psi(\lambda, \mu)}\, F(d\lambda)\, F(d\mu). \tag{3.2.22}$$

Lorsque $\varphi', \varphi'' \in L_T(F)$,

$$\varphi(\lambda, \mu) = \varphi'(\lambda)\overline{\varphi''(\mu)} \tag{3.2.23}$$

fait de toute évidence partie de l'espace $L_{T\times T}(F \times F)$, le système de toutes les fonctions du type (3.2.23) étant complet dans $L_{T\times T}(F \times F)$. Ceci découle directement de la définition même des espaces hilbertiens considérés $L_T(F)$ et $L_{T\times T}(F\times F)$, compte tenu de ce que les fonctions $\varphi(\lambda, \mu)$ du type (3.2.23) font partie de $L_{T\times T}(F \times F)$ quand φ' et φ'' sont des fonctions du type (3.1.21) et

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda, \mu) - \psi(\lambda, \mu)\|^2_{F\times F} &= \\ = \int\int |\varphi'(\lambda)\overline{\varphi''(\mu)} - \psi'(\lambda)\overline{\psi''(\mu)}|^2 F(d\lambda)\, F(d\mu) &\leqslant \\ \leqslant 2\int\int [|\varphi''(\mu)|^2 |\varphi'(\lambda) - \psi'(\lambda)|^2 + |\psi'(\lambda)|^2 |\varphi''(\mu) - \psi''(\mu)|^2] &\times \\ \times F(d\lambda)\, F(d\mu) = 2\,[\|\varphi''\|^2_F \|\varphi' - \psi'\|^2_F + \|\psi'\|^2_F \|\varphi'' - \psi''\|^2_F] & \end{aligned}$$

pour des fonctions quelconques φ', φ'' et ψ', ψ'' du type mentionné.

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ un système orthonormé quelconque dans l'es-

pace hilbertien $L_T(F)$. Il est évident qu'alors les fonctions

$$\varphi_{kj}(\lambda, \mu) = \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_j(\mu)}, \quad k, j = 1, 2, \ldots,$$

forment un système orthonormé complet dans l'espace hilbertien $L_{T\times T}(F \times F)$. Sous la condition (3.2.20) posons

$$b_{kj} = b(\varphi_k, \varphi_j), \quad k, j = 1, 2, \ldots,$$

et définissons l'élément $\psi_0(\lambda, \mu) \in L_{T\times T}(F \times F)$ comme suit:

$$\psi_0(\lambda, \mu) = \sum_{k, j} b_{kj}\varphi_{kj}(\lambda, \mu). \tag{3.2.24}$$

La formule (3.2.24) donne le développement de l'élément $\psi_0(\lambda, \mu)$ suivant le système orthonormé $\varphi_{kj}(\lambda, \mu)$, de sorte que

$$b(\varphi_k, \varphi_j) = \langle \varphi_k\overline{\varphi}_j, \psi_0\rangle_{F\times F}.$$

On voit que cette relation peut être étendue à toutes les combinaisons linéaires

$$\varphi'(\lambda) = \sum_k c'_k\varphi_k(\lambda), \qquad \varphi''(\mu) = \sum_j c''_j\varphi_j(\mu),$$

de sorte que

$$b(\varphi', \varphi'') = \langle \varphi'\overline{\varphi}'', \psi_0\rangle_{F\times F}. \tag{3.2.25}$$

Par passage à la limite on peut avoir dans la relation (3.2.25) des fonctions arbitraires $\varphi', \varphi'' \in L_T(F)$.

D'autre part, si la différence des fonctionnelles de corrélation $b(\varphi', \varphi'')$, $\varphi', \varphi'' \in L_T(F)$, peut s'écrire sous la forme (3.2.25), pour un système orthonormé quelconque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ on a

$$\sum_{k, j} b(\varphi_k, \varphi_j) \leqslant \|\psi_0\|^2_{F\times F},$$

donc la condition (3.2.20) se trouve vérifiée.

La formule (3.2.25) signifie que la fonctionnelle bilinéaire $b(\varphi', \varphi'')$ sur $L_T(F)$, en tant que fonctionnelle sur les fonctions correspondantes $\varphi'(\lambda)\overline{\varphi''(\mu)} \in L_{T\times T}(F \times F)$, se trouve prolongée jusqu'à la fonctionnelle linéaire continue dans l'espace hilbertien $L_{T\times T}(F \times F)$.

Nous arrivons au résultat suivant, en quelque sorte analogue au théorème 3.

Théorème 5. *Sous la condition* (3.1.27), *pour que les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes il faut et il suffit que la différence*

$$b(\varphi', \varphi'') = B(\varphi', \varphi'') - B_1(\varphi', \varphi''),$$

en tant que fonctionnelle sur les fonctions correspondantes $\varphi'(\lambda)\overline{\varphi''(\mu)} \in$ $\in L_{T\times T}(F \times F)$, *soit prolongée jusqu'à une fonctionnelle continue sur*

l'espace hilbertien $L_{T\times T}$ $(F \times F)$.

Considérons l'espase hilbertion $L_{T\times T}(F \times F_1)$ défini d'une manière analogue à $L_{T\times T}$ $(F \times F)$, avec le produit scalaire

$$\langle\varphi, \psi\rangle_{F\times F_1} = \int\int \varphi(\lambda, \mu)\,\overline{\psi(\lambda, \mu)}\,F(d\lambda)\,F_1(d\mu)$$

[comparer avec (3.2.22)]. Il est facile de voir que *) sous la condition (3.1.27) on a

$$\|\varphi\|^2_{F\times F} \asymp \|\varphi\|^2_{F\times F_1} \tag{3.2.26}$$

pour $\varphi \in L^0_{T\times T}$. Cette relation montre que les espaces hilbertiens $L_{T\times T}$ $(F \times F)$ et $L_{T\times T}$ $(F \times F_1)$ coïncident:

$$L_{T\times T}(F \times F) = L_{T\times T}(F \times F_1),$$

la relation (3.2.26) étant vraie pour tous les

$$\varphi \in L_{T\times T}(F \times F)\ (\varphi \in L_{T\times T}(F \times F_1)).$$

---

*) Il faut noter que $L_{T\times T}$ $(F \times F)$ est un modèle fonctionnel de l'espace hilbertien des grandeurs $\eta(\omega', \omega'')$ sur le produit $\Omega \times \Omega$ qui est la fermeture des grandeurs du type

$$\eta(\omega', \omega'') = \sum_{k,j} c_{kj}\xi(\omega', s_k)\,\xi(\omega'', t_j)$$

par rapport au produit scalaire du type

$$\int\int \eta_1(\omega', \omega'')\,\eta_2(\omega', \omega'')\,\mathbf{P}(d\omega') \times \mathbf{P}(d\omega'').$$

Aux grandeurs mentionnées $\eta(\omega', \omega'')$ correspondent les fonctions $\varphi(\lambda, \mu)$ du type (3.2.21) et

$$\int\int \eta_1(\omega', \omega'')\,\eta_2(\omega', \omega'')\,\mathbf{P}(d\omega') \times \mathbf{P}(d\omega'') = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{F\times F}.$$

D'une manière analogue

$$\int\int \eta_1(\omega', \omega'')\,\eta_2(\omega', \omega'')\,\mathbf{P}(d\omega') \times \mathbf{P}_1(d\omega'') = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{F\times F_1}.$$

La condition (3.1.27) signifie que

$$\int [\eta(\omega)]^2\,\mathbf{P}(d\omega) \asymp \int [\eta(\omega)]^2\,\mathbf{P}_1(d\omega)$$

pour des grandeurs quelconques du type $\eta(\omega) = \sum_k c_k \xi(\omega, t_k)$. Donc sous la condition (3.1.27) on a

$$\|\varphi\|^2_{F\times F} = \int \mathbf{P}(d\omega'') \int \left| \sum_k \left[\sum_j c_{kj}\xi(\omega'', t_j)\right] \xi(\omega', s_k)\right|^2 \mathbf{P}(d\omega') \asymp$$

$$\asymp \int \mathbf{P}(d\omega'') \int \left| \sum_k \left[\sum_j c_{kj}\,\xi(\omega'', t_j)\right] \xi(\omega', s_k)\right|^2 \mathbf{P}_1(d\omega') = \|\varphi\|^2_{F\times F_1}.$$

Il est évident que sous la condition (3.2.26) la fonctionnelle $b(\varphi', \varphi'')$ du type (3.2.25) se trouve prolongée en une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace hilbertien $L_{T\times T}(F \times F_1)$ et admet la représentation

$$b(\varphi', \varphi'') = \langle \varphi'\overline{\varphi''}, \psi\rangle_{F\times F_1}, \tag{3.2.27}$$

où $\psi(\lambda, \mu)$ est un élément de $L_{T\times T}(F \times F_1)$.

D'une manière analogue, sous la condition (3.2.26), la représentation (3.2.27) rend possible celle de la fonctionnelle $b(\varphi', \varphi'')$ par la formule (3.2.25). Mais la relation (3.2.27) entraîne également la condition (3.1.27) ainsi que la condition (3.2.26). Notamment, pour un élément quelconque $\varphi \in L_T^0$ on a

$$b(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_F^2 - \|\varphi\|_{F_1}^2 = \langle \varphi(\lambda)\overline{\varphi(\mu)}, \psi\rangle,$$

par conséquent

$$\left| \|\varphi\|_F^2 - \|\varphi\|_{F_1}^2 \right| \leqslant \|\varphi(\lambda)\overline{\varphi(\mu)}\|_{F\times F_1} \|\psi\|_{F\times F_1} = \\ = \|\varphi\|_F \|\varphi\|_{F_1} \|\psi\|_{F\times F_1}.$$

On voit que si $\|\varphi\|_F \to 0$ on a également $\|\varphi\|_{F_1} \to 0$ et inversement. Par conséquent, l'opérateur A de $L_T(F)$ dans $L_T(F_1)$ introduit précédemment est continu et possède un opérateur inverse A^{-1} continu. Mais ceci équivaut à la condition (3.1.27) (voir (3.2.15)).

Ainsi, si dans le théorème 5 on remplace l'espace $L_{T\times T}(F \times F)$ par $L_{T\times T}(F \times F_1)$, la condition supplémentaire (3.1.27) se trouve automatiquement vérifiée. Plus exactement on a le théorème suivant *).

Théorème 6. *Pour que les mesures gaussiennes* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes il faut et il suffit que la différence*

$$b(\varphi', \varphi'') = B(\varphi', \varphi'') - B_1(\varphi', \varphi''),$$

en tant que fonctionnelle sur les fonctions $\varphi'(\lambda)\overline{\varphi''(\mu)} \in L_{T\times T}^0$ *soit prolongée jusqu'à une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace hilbertien* $L_{T\times T}(F \times F_1)$.

§ 3. Conditions générales d'équivalence et formules de la densité des distributions équivalentes

Soient **P** et $\mathbf{P}_1$ des mesures gaussiennes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ engendrée par toutes les valeurs $\xi(t)$, $t \in T$, du processus aléatoire $\xi(t)$, stationnaire par rapport à la mesure **P**, T étant un ensemble arbitraire sur l'axe réel.

*) Une autre formulation du théorème 6 et du théorème 3 plus simple a été proposée par Parzen (voir par exemple, E. Parzen, *Probability density functionals and reproducing kernel Hilbert spaces*, Time series analysis, ed. M. Rosenblatt, N. J., 1963).

Considérons tout d'abord le cas où ces mesures ne diffèrent que par leur valeur moyenne

$$a(t) = \mathbf{M}_1 \xi(t),$$

plus exactement quand $\mathbf{P}_1^0 = \mathbf{P}$ (voir théorème 2).

Théorème 7. *Pour que les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$ *il faut et il suffit que la valeur moyenne* $a(t)$ *admette une représentation spectrale de la forme*

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} \psi(\lambda) F(d\lambda) \tag{3.3.1}$$

pour $t \in T$, *où* $\psi(\lambda)$ *est une fonction satisfaisant à la condition* $\int |\psi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty$. *Pour les mesures équivalentes l'équation intégrale* (3.3.1) *a une solution* $\psi(\lambda) \in L_T(F)$ *et la densité* $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ *est donnée par la formule*

$$p(\omega) = D \exp\left\{\int \psi(\lambda) \Phi(d\lambda)\right\}, \tag{3.3.2}$$

où $\psi(\lambda)$ *est la solution de l'équation* (3.3.1) *de l'espace* $L_T(F)$ *et* $D = e^{-\frac{1}{2}\|\psi\|_F^2}$ *est un facteur de normalisation.*

Comme précédemment, ici $F(d\lambda)$ est la mesure spectrale et $\Phi(d\lambda)$ la mesure spectrale stochastique du processus aléatoire $\xi(t)$.

Démonstration. En vertu du théorème 3, pour que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ soient équivalentes il faut et il suffit qu'on ait la représentation (3.3.1) avec une fonction $\psi(\lambda)$ de l'espace hilbertien $L_T(F)$, car le système de fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$, $t \in T$, étant complet, ceci équivaut à la relation (3.2.13). Ensuite, si la condition (3.3.1) est vraie pour une fonction quelconque $\psi(\lambda)$ de l'espace hilbertien $L_{(-\infty, \infty)}(F)$ de toutes les fonctions de carré intégrable, elle est également vraie pour une certaine fonction $\psi_0(\lambda)$ de l'espace $L_T(F)$ qui est projection de l'élément $\psi(\lambda)$ sur l'espace $L_T(F) \subseteq L_{(-\infty, \infty)}(F)$, car

$$\langle e^{i\lambda t}, \psi(\lambda)\rangle_F = \langle e^{i\lambda t}, \psi_0(\lambda)\rangle_F$$

pour tous les $t \in T$ (quand $e^{i\lambda t} \in L_T(F)$).

Considérons maintenant les mesures équivalentes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ et leur densité $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$. Soit un système complet orthonormé de fonctions $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \in L_T(F)$ et considérons les densités $p_n(\omega) = \frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}(d\omega)}$ sur les σ-algèbres $\mathfrak{A}_n$ engendrées chacune par les grandeurs $\eta_k = \eta(\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$ du type (3.1.20). Comme nous l'avons déjà noté plus haut (voir point 3 du § 1 de ce chapitre) on a

$$p(\omega) = \lim_{n\to\infty} p_n(\omega).$$

Il est évident que (voir formule (3.2.2))

$$p_n(\omega) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int \psi_n(\lambda)\,\Phi(d\lambda) - \frac{1}{2}\|\ _n \|_F^2\right\},$$

où

$$a_k = \mathbf{M}_1 \eta_k = \langle \varphi_k, \psi\rangle_F, \quad k = 1, 2 \ldots.$$

$\psi(\lambda) \in L_T(F)$ est une fonction de (3.3.1) et

$$\psi_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(\lambda).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda) = \lim \sum_{k=1}^{n} \langle \psi, \varphi_k\rangle_F\, \varphi_k(\lambda) = \psi(\lambda)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\lambda)\|_n^2 = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|\psi(\lambda)\|_F^2.$$

Ainsi

$$p(\omega) = \lim_{n\to\infty} p_n(\omega) = \exp\left\{\int \psi(\lambda)\,\Phi(d\lambda) - \frac{1}{2}\|\psi(\lambda)\|_F^2\right\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons passer maintenant aux mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ de valeur moyenne nulle et de fonctions de corrélation quelconques.

Soit l'espace $H_2(T)$ introduit avec les autres espaces $H_n(T)$ dans le § 5 du chapitre I. C'est une enveloppe linéaire fermée de toutes les grandeurs $\xi(s)\,\xi(t) - B(s, t)$, $s, t \in T$.

Considérons l'espace linéaire, compact partout dans $H_2(T)$, de toutes les grandeurs (représentées sous une forme symétrique)

$$\eta = \sum_{k,j} c_{kj}\,[\xi(t_k)\,\xi(t_j) - B(t_k, t_j)] \qquad (3.3.3)$$

à coefficients réels symétriques $c_{kj} = c_{jk}$, $k, j = 1, 2, \ldots$, qui est l'enveloppe linéaire des grandeurs $\xi(s)\,\xi(t) - B(s, t)$. Compte tenu de la formule des moments (voir formule (1.5.10))

$$\mathbf{M}\xi(t_1)\,\xi(t_2)\,\xi(t_3)\,\xi(t_4) = B(t_1, t_2)\,B(t_3, t_4) + B(t_1, t_3)\,B(t_2, t_4) + B(t_1, t_4)\,B(t_2, t_3),$$

il est facile de vérifier que

$$\mathrm{M}\eta'\eta'' = \sum_{k,\, j} \sum_{m,\, n} c'_{kj} c''_{mn} B(t_k,\ t_m)\, B(t_j,\ t_n) + \\ + \sum_{k,\, j} \sum_{m,\, n} c'_{kj} c''_{mn} B(t_k,\ t_n)\, B(t_j,\ t_m) = \\ = 2 \sum_{k,\, j} \sum_{m,\, n} c'_{kj} c''_{mn} B(t_k,\ t_m)\, B(t_j,\ t_n) \qquad (3.3.4)$$

quels que soient

$$\eta' = \sum_{k,\, j} c'_{kj} [\xi(t_k)\, \xi(t_j) - B(t_k,\ t_j)]$$

et

$$\eta'' = \sum_{k,\, j} c''_{kj} [\xi(t_k)\, \xi(t_j) - B(t_k,\ t_j)]$$

du type étudié. Introduisons la mesure stochastique $\Psi(d\lambda,\ d\mu)$ en posant

$$\Psi(\Delta_1 \times \Delta_2) = \Phi(\Delta_1)\, \overline{\Phi(\Delta_2)} - F(\Delta_1 \cap \Delta_2), \qquad (3.3.5)$$

il est facile de voir que chacune des grandeurs du type (3.3.3) peut être donnée par la formule

$$\eta = \int \int \varphi(\lambda,\ \mu)\, \Psi(d\lambda,\ d\mu), \qquad (3.3.6)$$

avec

$$\varphi(\lambda,\ \mu) = \sum_{k,\, j} c_{kj} e^{i(\lambda t_k - \mu t_j)}. \qquad (3.3.7)$$

On obtient à partir de la formule (3.3.4)

$$\mathrm{M}\eta'\eta'' = 2 \int \int \varphi'(\lambda,\ \mu)\, \overline{\varphi''(\lambda,\ \mu)}\, F(d\lambda)\, F(d\mu) = 2 \langle \varphi' .\ \varphi'' \rangle_{F \times F} \qquad (3.3.8)$$

avec

$$\varphi'(\lambda,\ \mu) = \sum_{k,\, j} c'_{kj} e^{i(\lambda_k t - \mu t_j)}$$

et

$$\varphi''(\lambda,\ \mu) = \sum_{k,\, j} c''_{kj} e^{i(\lambda t_k - \mu t_j)}.$$

Les relations (3.3.6) à (3.3.8) montrent qu'à la suite convergente $\eta_1, \eta_2, \ldots \in H_2$ correspond, en vertu de la formule (3.3.6), une suite convergente de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L_{T \times T}(F \times F)$. Ainsi, toute grandeur $\eta \in H_2$, en tant que limite d'une suite de grandeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots$ de la forme (3.3.3), admet la représentation par la formule (3.3.6) où la fonction $\varphi(\lambda,\ \mu) \in L_{T \times T}(F \times F)$ est la limite des fonc-

tions correspondantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ du type (3.3.7) et pour toute fonction $\varphi(\lambda, \mu)$ la formule (3.3.6) détermine une certaine grandeur $\eta \in H_2(T)$.

Théorème 8. *Les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *(de valeur moyenne nulle) sont équivalentes sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$ *si et seulement si la différence des fonctions de corrélation*

$$b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$$

admet la représentation

$$b(s, t) = \int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)} \psi(\lambda, \mu) F(d\lambda) F_1(d\mu) \qquad (3.3.9)$$

avec $s, t \in T$, *où la fonction* $\psi(\lambda, \mu)$ *est telle que*

$$\int\int |\psi(\lambda, \mu)|^2 F(d\lambda) F_1(d\mu) < \infty.$$

Pour des mesures équivalentes $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *l'équation intégrale* (3.3.9) *a pour solution* $\psi(\lambda, \mu) \in L_{T\times T}(F \times F_1)$. *La densité* $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ *des mesures équivalentes peut être donnée par la formule*

$$p(\omega) = D \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\int \psi(\lambda, \mu)\Psi(d\lambda, d\mu)\right\}, \qquad (3.3.10)$$

où $\psi(\lambda, \mu)$ *est la solution de l'équation* (3.3.9) *dans l'espace* $L_{T\times T}(F \times F_1)$, *et* D *un facteur de normalisation.*

Démonstration. Les fonctions $\varphi(\lambda, \mu) = e^{i(\lambda s - \mu t)}$ $s, t \in T$, formant un système complet dans l'espace hilbertien $L_{T\times T}(F \times F_1)$, la relation (3.3.9) pour $\psi(\lambda, \mu) \in L_{T\times T}(F \times F_1)$ équivaut à la relation (3.2.27), qui en vertu du théorème 6 donne l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$. Mais si la relation (3.3.9) est vérifiée pour une certaine fonction $\psi(\lambda, \mu)$ de l'espace hilbertien de toutes les fonctions de carré intégrable (par rapport à $F(d\lambda) \times F_1(d\mu)$) elle l'est également pour la fonction $\psi_0(\lambda, \mu)$, projection de l'élément $\psi(\lambda, \mu)$ sur l'espace $L_{T\times T}(F \times F_1)$.

Considérons maintenant les mesures équivalentes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$. Soit la suite $t_1, t_2, \ldots$ compacte partout dans l'ensemble T. Il est évident que les grandeurs $\eta_k = \xi(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, forment un système complet dans l'espace hilbertien $L_T(F)$. Considérons les densités $p_n(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur les σ-algèbres $\mathfrak{A}_n$ engendrées chacune par les grandeurs η_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. En vertu de la formule (3.2.1) on a

$$\log p_n(\omega) = \mathbf{M} \log p_n - \frac{1}{2} \sum_{k, j=1} c_{kj}[\xi(t_k)\xi(t_j) - B(t_k, t_j)], \quad (3.3.11)$$

où $\{c_{kj}\}$ est la différence des matrices inverses aux matrices de corrélation $\{B_1(t_k, t_j)\}$ et $\{B(t_k, t_j)\}$. Les grandeurs

$$\eta_n(\omega) = \sum_{k, j=1}^{n} c_{kj}[\xi(t_k)\xi(t_j) - B(t_k, t_j)],$$

figurant dans la formule (3.3.11) appartiennent à l'espace $H_2(T)$ et peuvent s'écrire sous la forme (3.3.6):

$$\eta_n = \int\int \psi_n(\lambda, \mu)\,\Psi(d\lambda, d\mu), \qquad (3.3.12)$$

où

$$\psi_n(\lambda, \mu) = \sum_{k, j=1}^{n} c_{kj} e^{i(\lambda t_k - \mu t_j)}. \qquad (3.3.13)$$

Il est facile de vérifier que chacune des fonctions $\psi_n(\lambda, \mu)$ satisfait à l'équation du type (3.3.9)

$$\int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)}\psi_n(\lambda, \mu)\,F(d\lambda)\,F_1(d\mu) = b(s, t) \qquad (3.3.14)$$

pour $s, t = t_1, \ldots, t_n$. En effet, cette égalité peut s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\{B(t_k, t_j)\}\{c_{kj}\}\{B_1(t_k, t_j)\} = \{b(t_k, t_j)\},$$

où

$$\{c_{kj}\} = \{B_1(t_k, t_j)\}^{-1} - \{B(t_k, t_j)\}^{-1},$$

d'où on tire immédiatement que

$$\{B(t_k, t_j)\}\{c_{kj}\} = \{B(t_k, t_j)\}\{B_1(t_k, t_j)\}^{-1} - E,$$

$$\{B(t_k, t_j)\}\{c_{kj}\}\{B_1(t_k, t_j)\} = \{B(t_k, t_j)\} - \{B_1(t_k, t_j)\} = \{b(t_k, t_j)\}.$$

L'égalité (3.3.14) peut également s'écrire comme suit:

$$\langle \varphi, \psi_n \rangle_{F \times F_1} = b(s, t), \quad s, t \in T_n,$$

avec $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ et $\varphi(\lambda, \mu) = e^{i(\lambda s - \mu t)}$, $s, t \in T_n$. Il est évident que pour $m \leqslant n$ la fonction $\psi_m(\lambda, \mu)$ coïncide avec la projection de l'élément $\psi_n(\lambda, \mu) \in L_{T_n \times T_n}(F \times F_1)$ sur le sous-espace $L_{T_m \times T_m}(F \times F_1)$ de sorte que l'on a

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2_{F \times F_1} = \|\psi_n\|^2_{F \times F_1} - \|\psi_m\|^2_{F \times F_1} \to 0$$

pour $m, n \to \infty$, car la suite $\|\psi_n\|^2_{F \times F_1}$, $n = 1, 2, \ldots$, est monotone décroissante (bornée inférieurement par zéro) et la limite $\lim \|\psi_n\|^2$ existe. Il est également évident que, comme l'espace hilbertien $L_{T \times T}(F \times F_1)$ coïncide avec la fermeture des espaces élargis $L_{T_n \times T_n}(F \times F_1)$, $n = 1, 2, \ldots$, et que chacune des fonctions $\psi_n(\lambda, \mu)$ dans la relation (3.3.14) est la projection de l'élé-

ment $\psi(\lambda, \mu) \in L_{T\times T}(F \times F_1)$ de l'équation (3.3.9) et la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\lambda, \mu) \in L_{T\times T}(F \times F_1)$ est dotée de la même propriété, on a

$$\psi(\lambda, \mu) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda, \mu).$$

Ceci montre que les grandeurs η_n de la forme (3.3.12) figurant dans la formule (3.3.11) convergent en moyenne vers

$$\eta = \int\int \psi(\lambda, \mu)\, \Psi(d\lambda, d\mu) \in H_2(T).$$

Nous avons déjà montré (voir (3.1.33)) que pour des mesures équivalentes la limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n$$

existe.

Ainsi, la densité cherchée $p(\omega) = \mathbf{P}_1(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ peut être déterminée à partir de la relation limite (3.1.34):

$$\log p(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n + \lim_{n\to\infty} [\log p_n - \mathbf{M} \log p_n] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \log p_n -$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int\int \psi_n(\lambda, \mu)\, \Psi(d\lambda, d\mu) =$$

$$= \log D - \frac{1}{2} \int\int \psi(\lambda, \mu)\, \Psi(d\lambda, d\mu),$$

ce qui donne la formule (3.3.10).

§ 4. Etude d'autres conditions d'équivalence

1. Mesures gaussiennes différant par leur valeur moyenne. Nous allons utiliser les conditions d'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ établies dans le théorème 7. Considérons le cas où la mesure spectrale $F(d\lambda)$ est absolument continue et sa densité

$$f(\lambda) = \frac{F(d\lambda)}{d\lambda}$$

est limitée.

Pour l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ différant seulement par leur valeur moyenne

$$a(t) = \mathbf{M}_1 \xi(t), \quad t \in T, \tag{3.4.1}$$

il faut et il suffit que la fonction $a(t)$ admette la représentation

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} \psi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in T, \tag{3.4.2}$$

où $\psi(\lambda)$ est une fonction satisfaisant à la condition

$$\int |\psi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty$$

(voir théorème 7). Posons

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) f(\lambda). \tag{3.4.3}$$

Le second membre de la formule (3.4.2) détermine une certaine fonction

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.4.4}$$

coïncidant pour $t \in T$ avec la valeur moyenne (3.4.1), où la fonction $\varphi(\lambda)$ de la forme (3.4.3) est de carré intégrable:

$$\int |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant C \int |\psi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty$$

pour $f(\lambda) \leqslant C$.

Ceci signifie que la fonction $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, donnée par (3.4.4) est de carré intégrable et que $\varphi(\lambda)$ est sa transformée de Fourier:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda t} a(t)\, dt. \tag{3.4.5}$$

La formule (3.4.3) montre que la fonction $\varphi(\lambda)$ est non seulement de carré intégrable, mais satisfait également à la condition

$$\int \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty. \tag{3.4.6}$$

Supposons ensuite que la fonction $a(t)$, $t \in T$, puisse être prolongée sur tout l'axe réel $-\infty < t < \infty$ de telle sorte que ce prolongement soit une fonction $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, de carré intégrable dont la transformée de Fourier $\varphi(\lambda)$ satisfait à la condition (3.4.6). On a alors pour t quelconque

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \int e^{-i\lambda t} \psi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda,$$

où la fonction $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)/f(\lambda)$ vérifie la condition $\int |\psi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty$. En vertu du théorème 7, ceci signifie que les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes.

Nous avons ainsi établi le résultat suivant:

Théorème 9. *Pour que les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes il faut et il suffit que la fonction* $a(t)$, $t \in T$ *(valeur moyenne) puisse être prolongée en une fonction* $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, *de carré intégrable dont la transformée de Fourier satisfasse à la condition* 3.4.6).

Nous allons considérer que l'ensemble T est un segment fini sur la droite réelle (par exemple, $T = [0, \tau]$).

Soient les densités spectrales $f(\lambda)$ satisfaisant à la condition

$$f(\lambda) \leqslant K(1+\lambda^2)^{-n} \tag{3.4.7}$$

ou à la condition

$$f(\lambda) \geqslant k(1+\lambda^2)^{-n}, \tag{3.4.8}$$

où K et k sont des constantes positives. Les résultats qui vont être obtenus seront étendus dans la suite (voir point 3 de ce paragraphe) au cas où les densités spectrales ne satisfont qu'à la condition

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} f(\lambda)|\lambda|^{2n} < \infty \tag{3.4.9}$$

ou à la condition

$$\underline{\lim_{\lambda\to\infty}} f(\lambda)|\lambda|^{2n} > 0. \tag{3.4.10}$$

Théorème 10. *Dans le cas où la densité spectrale $f(\lambda)$ est du type* (3.4.7), *pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *il faut que la fonction $a(t)$ (valeur moyenne) ait, sur le segment considéré $T = [0, \tau]$, la dérivée $(n-1)$-ième $a^{(n-1)}(t)$ absolument continue, telle que*

$$\int_T [a^{(n)}(t)]^2\,dt < \infty. \tag{3.4.11}$$

Lorsque la densité spectrale $f(\lambda)$ est du type (3.4.8) *la condition mentionnée est suffisante pour l'équivalence de* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$.

Démonstration. Il est évident que sous la condition (3.4.7) la fonction $\varphi(\lambda)$ satisfaisant à la relation (3.4.6) est telle que

$$\int (1+|\lambda|^n)^2|\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty \tag{3.4.12}$$

et pour $m=0, 1, \ldots, n-1$ quelconque

$$\int |\lambda|^m|\varphi(\lambda)|\,d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int \left(\frac{|\lambda|^m}{1+|\lambda|^n}\right)^2 d\lambda\right]^{1/2}\left[\int (1+|\lambda|^n)^2|\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda\right]^{1/2} < \infty.$$

Par conséquent la fonction

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

admet $n-1$ dérivées. Nous allons montrer que la dérivée $(n-1)$-ième

$$a^{(n-1)}(t) = \int (-i\lambda)^{n-1}e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

est absolument continue et que la condition (3.4.11) est satisfaite.

Pour des intervalles disjoints quelconques (t_k, t_{k+1}), $k=1, 2, \ldots$, on a

$$\sum_k [a^{(n-1)}(t_{k+1}) - a^{(n-1)}(t_k)] =$$

$$= \int \Big[\sum_k (e^{-i\lambda t_{k+1}} - e^{-i\lambda t_k}\Big] (-i\lambda)^{n-1} \varphi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int \Big[\sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-i\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, dt \Big] (-i\lambda)^{n-1} \varphi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int \varphi_\Delta(\lambda) (-i\lambda)^n \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad (3.4.13)$$

où

$$\varphi_\Delta(\lambda) = \int e^{-i\lambda t} \chi_\Delta(t)\, dt$$

est la transformée de Fourier de la fonction $\chi_\Delta(t)$ qui est l'indicateur de l'ensemble $\Delta = \bigcup_k (t_k, t_{k+1})$. Il est évident qu'en vertu de la condition (3.4.12) on a

$$\Big| \sum_k [a^{(n-1)}(t_{k+1}) - a^{(n-1)}(t_k)] \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\int |\chi_\Delta(\lambda)|^2 d\lambda \Big]^{1/2} \Big[\int |\lambda|^{2n} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda \Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \Big[\int |\chi_\Delta(t)|^2 dt \Big]^{1/2} = C\delta^{1/2},$$

où C est une constante et

$$\delta = \sum_k (t_{k+1} - t_k),$$

ce qui démontre la continuité absolue de la fonction $a^{(n-1)}(t)$. Il est également évident que sa dérivée

$$a^{(n)}(t) = \int (-i\lambda)^n e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

définie pour presque tous les t, coïncide avec la transformée de Fourier de la fonction $(-i\lambda)^n \varphi(\lambda)$ de carré intégrable et satisfait donc à la condition (3.4.11).

Supposons maintenant que la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfasse à la condition (3.4.8) et que soit remplie la condition (3.4.11). Il est clair que la fonction $a(t)$ peut être prolongée du segment $T = [0, \tau]$ sur tout l'axe réel de manière à avoir la dérivée $(n-1)$-

ième $a^{(n-1)}(t)$ absolument continue et à être nulle à l'extérieur d'un certain segment $T' \supseteq T$ avec $\int [a^{(n)}(t)]^2\,dt < \infty$. Posons

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\lambda t} a^{(n)}(t)\,dt.$$

Après n intégrations par parties on a

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\lambda t} a(t)\,dt = (i\lambda)^{-n}\psi(\lambda)$$

et

$$\int |\lambda|^{2n} |\varphi(\lambda)|^2\,d\lambda = \int |\psi(\lambda)|^2\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int [a^{(n)}(t)]^2\,dt < \infty.$$

Par conséquent, la condition (3.4.6) se trouve satisfaite et en vertu du théorème 9 les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes, ce qu'il fallait démontrer.

2. Mesures gaussiennes différant par leurs fonctions de corrélation. Nous allons utiliser les conditions d'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ établies dans le théorème 8. Considérons le cas où les mesures spectrales $F(d\lambda)$ et $F_1(d\lambda)$ sont absolument continues et leurs densités spectrales

$$f(\lambda) = F(d\lambda)/d\lambda \text{ et } f_1(\lambda) = F_1(d\lambda)/d\lambda$$

sont bornées. Soit

$$b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t), \quad s, t \in T,$$

la différence des fonctions de corrélation correspondantes

$$B(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} f(\lambda)\,d\lambda$$

et

$$B_1(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} f_1(\lambda)\,d\lambda.$$

Théorème 11. *Pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *il faut et il suffit que la différence de leurs fonctions de corrélation* $b(s, t)$, $s, t \in T$, *puisse être prolongée en une fonction* $b(s, t)$ *de carré intégrable (dans tout le plan* $-\infty < s, t < \infty$*) dont la transformée de Fourier*

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\lambda s - \mu t)} b(s, t)\,ds\,dt$$

satisfasse à la condition

$$\int\int \frac{|\varphi(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) f_1(\mu)}\,d\lambda\,d\mu < \infty. \tag{3.4.14}$$

Démonstration. En vertu du théorème 8 pour l'équivalence de **P** et $\mathbf{P}_1$ il faut et il suffit que la fonction $b(s, t)$, $s, t \in T$, admette la représentation

$$b(s, t) = \int e^{-i(\lambda s - \mu t)} \psi(\lambda, \mu) f(\lambda) f_1(\mu)\, d\lambda\, d\mu$$

avec $\psi(\lambda, \mu)$ satisfaisant à la condition

$$\int\int |\psi(\lambda, \mu)|^2 f(\lambda) f_1(\mu)\, d\lambda\, d\mu < \infty.$$

Posons

$$\varphi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu) f(\lambda) f_1(\mu).$$

Pour des densités bornées $f(\lambda)$ et $f_1(\mu)$ la fonction $\varphi(\lambda, \mu)$ satisfaisant à la condition (3.4.14) se trouve être de carré intégrable, et sa transformée de Fourier $b(s, t)$ coïncide sur l'ensemble $T \times T$ avec la différence des fonctions de corrélation envisagées, de telle sorte que les conditions du théorème 11 sont nécessaires. D'un autre côté, si ces conditions sont satisfaites, la fonction $b(s, t)$, $s, t \in T$, peut s'écrire sous la forme

$$b(s, t) = \int e^{-i(\lambda s - \mu t)} \varphi(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

avec $\varphi(\lambda, \mu)$ satisfaisant à la condition (3.4.14), mais comme nous l'avons montré précédemment, ceci signifie que les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Notons que dans le cas où l'ensemble T est tout l'axe réel, la fonction $b(s, t)$ est donnée sur tout le plan $-\infty < s, t < \infty$ par la formule

$$b(s, t) = \int\int e^{-i\lambda(s-t)} [f(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda. \tag{3.4.15}$$

Il est évident que si la différence

$$g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

diffère de zéro sur l'ensemble de mesure positive, on a

$$\int\int |b(s, t)|^2\, ds\, dt = \infty,$$

et en vertu du théorème 11 les mesures **P** et $\mathbf{P}_1$ seront orthogonales. Par conséquent, les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ ne sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ pour $T = (-\infty, \infty)$ que si elles coïncident (lorsque coïncident les densités spectrales $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$), ce qui est en accord avec l'exemple de la page 101.

Dans la suite nous n'envisagerons que le cas où T est un segment fini sur la droite réelle (par exemple, $T = [0, \tau]$) et la densité spectrale $f(\lambda)$ pour un certain n satisfait à la relation (3.4.8). Dans le

point 3 les résultats qui suivent seront généralisés au cas d'une densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.10).

Notons que si la densité spectrale $f(\lambda)$ décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance $|\lambda|^{-2n}$ (pour $\lambda \to \infty$), plus exactement, si le processus stationnaire $\xi(t)$ est « analytique », c'est-à-dire que

$$\mathbf{M}\left[\xi(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi^{(k)}(0)}{k!} t^k\right]^2 = \int \left| e^{i\lambda t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(i\lambda)^k}{k!} t^k \right|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2 \int \lambda^{2(n+1)} f(\lambda)\, d\lambda \to 0 \text{ pour } n \to \infty, \quad (3.4.16)$$

le complété de la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ contient toute la σ-algèbre $\mathfrak{A}(-\infty, \infty)$ et comme nous venons de le mentionner, les mesures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ ne sont équivalentes que lorsqu'elles simplement coïncident.

Nous avons montré (voir point 1, § 1, chapitre II) que si la condition (3.4.8) est satisfaite, l'espace $L_T(F)$ est formé de fonctions analytiques entières.

Revenons à l'étude des conditions d'équivalence données dans le théorème 4 et utilisons l'opérateur correspondant $\Delta = E - A^*A$ dans l'espace hilbertien $L_T(F)$.

L e m m e 5. *Supposons que l'espace $L_T(F)$ se compose de fonctions analytiques entières et soit $\Delta = E - A^*A$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt; la condition* (3.1.27) *équivalente à ce que l'opérateur Δ n'a pas de valeur propre égale à* 1 *se trouve alors satisfaite.*

D é m o n s t r a t i o n. L'opérateur $A^*A = E - \Delta$ étant borné, on a

$$\langle A^*A\varphi, \varphi\rangle_F = \|\varphi\|_{F_1}^2 \leqslant C \|\varphi\|_F^2$$

pour tous les $\varphi(\lambda) \in L_T(F)$, C étant une constante. Supposons qu'il existe une fonction propre $\varphi(\lambda) \in L_T(F)$ ayant l'unité pour valeur propre. Soit $\varphi_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions de L_T^0 convergeant vers $\varphi(\lambda)$ dans l'espace $L_T(F)$. Dans $L_T(F_1)$ pour $n \to \infty$ cette suite converge vers 0:

$$\|\varphi_n\|_{F_1}^2 = \langle\varphi_n, \varphi_n\rangle_F - \langle[E - A^*A]\varphi_n, \varphi_n\rangle_F \to 0.$$

Par conséquent, la fonction limite $\varphi(\lambda)$ est nulle pour presque tous les λ pour lesquels $f_1(\lambda) > 0$. Mais dans ce cas la fonction analytique $\varphi(\lambda)$ est identiquement nulle, ce qui contredit le fait que c'est une fonction propre. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Ce résultat permet de renforcer les théorèmes 4, 5 en y omettant la condition supplémentaire (3.1.27); plus exactement, cette condition se trouve automatiquement vérifiée si seulement $\Delta = E - A^*A$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Ceci conduit à son tour au résultat suivant (répétant presque intégralement le théorème 8):

pour l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$ *il faut et il suffit que la différence* $b(s, t) = B(s, t) - B_1(s, t)$ *des fonctions de corrélation admette la représentation* (comparer avec (3.3.9))

$$b(s, t) = \int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)}\varphi(\lambda, \mu) F(d\lambda) F(d\mu) \qquad (3.4.17)$$

avec $s, t \in T$, *où la fonction* $\varphi(\lambda, \mu)$ *est telle que*

$$\int\int |\varphi(\lambda, \mu)|^2 F(d\lambda) F(d\mu) < \infty. \qquad (3.4.18)$$

On peut facilement en déduire (tout comme dans le cas du théorème 11) le résultat suivant.

Théorème 12. *Sous la condition* (3.4.8), *pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$, *il faut et il suffit que la différence de leurs fonctions de corrélation* $b(s, t)$, $s, t \in T$ (*où* $T = [0, \tau]$) *puisse être prolongée en une fonction* $b(s, t)$, $-\infty < s, t < +\infty$, *de carré intégrable dont la transformée de Fourier satisfasse à la condition* *)

$$\int\int \frac{|\varphi(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) f(\mu)} d\lambda\, d\mu < \infty. \qquad (3.4.19)$$

Nous allons utiliser maintenant la condition (3.4.19). Soit la fonction

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\lambda s - \mu t)} b(s, t)\, ds\, dt \qquad (3.4.20)$$

figurant dans cette condition (où $b(s, t)$ est le prolongement de la différence des fonctions de corrélation donnée sur le carré $T \times T$).

Supposons que la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfasse à la condition (3.4.7). Il découle de la condition (3.4.19) que

$$\int\int (1 + |\lambda|^n)^2 (1 + |\mu|^n)^2 |\varphi(\lambda, \mu)|^2 d\lambda\, d\mu < \infty \qquad (3.4.21)$$

et pour $k, m = 0, 1, \ldots, n-1$ quelconques on a

$$\int\int |\lambda|^k |\mu|^m |\varphi(\lambda, \mu)|\, d\lambda\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int \left(\frac{|\lambda|^k}{1 + |\lambda|^n}\right)^2 d\lambda \int \left(\frac{|\mu|^m}{1 + |\mu|^n}\right)^2 d\mu\right]^{1/2} \times$$
$$\times \left[\int\int (1 + |\lambda|^n)^2 (1 + |\mu|^n)^2 |\varphi(\lambda, \mu)|^2 d\lambda\, d\mu\right]^{1/2} < \infty.$$

Par conséquent la fonction

$$b(s, t) = \int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)}\varphi(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

*) Il est clair que le théorème 12 reste vrai aussi lorsque l'espace $L_T(F)$ se compose de fonctions analytiques (voir chapitre II).

possède toutes les dérivées, jusqu'à la $(n-1)$-ième, par rapport à chacune des variables:

$$\frac{\partial^{k+m} b(s, t)}{\partial s^k\, \partial t^m} = \int\int (-i\lambda)^k (i\mu)^m e^{-i(\lambda s - \mu t)} \varphi(\lambda, \mu)\, ds\, dt$$
$$(k, m = 0, \ldots, n-1).$$

Montrons que la fonction $C(s, t) = \frac{\partial^{2(n-1)} b(s, t)}{\partial s^{n-1}\, \partial t^{n-1}}$ est absolument continue. Ceci signifie que $C(s, t)$ est la «fonction de répartition» d'une mesure borélienne absolument continue *) $m(\Delta)$ sur le carré $T \times T$, c'est-à-dire

$$m(\Delta) = C(s'', t'') - C(s'', t') - C(s', t'') + C(s', t'),$$

pour un rectangle quelconque $\Delta = (s', s''] \times (t', t'']$.

Il est facile de voir que pour un ensemble quelconque $\Delta = \bigcup_k \Delta_k$, réunion d'un nombre fini de rectangles disjoints $\Delta_k = (s'_k, s''_k] \times (t'_k, t''_k]$, on a l'égalité suivante:

$$m(\Delta) = \int\int \varphi_\Delta(\lambda, \mu)\, (-i\lambda)^n (i\mu)^n \varphi(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

où

$$\varphi_\Delta(\lambda, \mu) = \int\int e^{-i(\lambda s - \mu t)} \chi_\Delta(s, t)\, ds\, dt$$

est la transformée de Fourier de la fonction $\chi_\Delta(s, t)$ qui est indicateur de l'ensemble Δ (cf. (3.4.13)). En vertu de la condition (3.4.21) on a

$$|m(\Delta)| \leqslant \left[\int\int |\varphi_\Delta(\lambda, \mu)|^2 d\lambda\, d\mu\right]^{1/2} \times$$
$$\times \left[\int\int |\lambda|^{2n} |\mu|^{2n} |\varphi(\lambda, \mu)|^2 d\lambda\, d\mu\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\int\int |\chi_\Delta(s, t)|^2 ds\, dt\right]^{1/2} C\, l(\Delta)^{1/2},$$

où $l(\Delta)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble Δ. On voit que la fonction additive $m(\Delta)$ est réellement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Il est évident que la densité $c(s, t) = \frac{m(ds\, dt)}{ds\, dt}$ coïncide avec la dérivée $\frac{\partial^{2n} b(s, t)}{\partial s^n\, \partial t^n}$ existant pour presque tous les $s, t \in T \times T$. Sous la condition (3.4.21) cette dérivée $c(s, t) = \frac{\partial^{2n} b(s, t)}{\partial s^n\, \partial t^n}$ est

*) En d'autres termes, la fonction additive de la variation bornée $m(\Delta)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

évidemment la transformée de Fourier de la fonction $\psi(\lambda, \mu) = (-i\lambda)^n (i\mu)^n \varphi(\lambda, \mu)$ de carré intégrable, soit

$$\frac{\partial^{2n} b(s, t)}{\partial s^n \partial t^n} = \int\int (-i\lambda)^n (i\mu)^n e^{-i(\lambda s - \mu t)} \varphi(\lambda, \mu) \, d\lambda \, d\mu$$

et par conséquent

$$\int\int_{T \times T} \left[\frac{\partial^{2n} b(s, t)}{\partial s^n \partial t^n} \right]^2 ds \, dt < \infty. \tag{3.4.22}$$

Supposons maintenant que la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfasse à la condition (3.4.8), que la différence des fonctions de corrélation $b(s, t)$ admette la dérivée absolument continue $\frac{\partial^{2(n-1)} b(s, t)}{\partial s^{n-1} \partial t^{n-1}}$ et que la condition (3.4.22) soit vérifiée.

Il est évident que la fonction $b(s, t)$ peut être prolongée sur tout le plan $-\infty < s, \ t < \infty$ de telle sorte que, comme précédemment, elle possède une dérivée du type mentionné et qu'elle s'annule à l'extérieur d'un certain carré fini $T' \times T' \supseteq T \times T$. Par intégration multiple et $2n$ intégrations par parties on obtient à partir de la formule

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{T' \times T'} e^{i(\lambda s - \mu t)} \frac{\partial^{2n}}{\partial s^n \partial t^n} b(s, t) \, ds \, dt$$

le résultat suivant :

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{T' \times T'} e^{i(\lambda s - \mu t)} b(s, t) \, ds \, dt = \frac{1}{(i\lambda)^n (-i\mu)^n} \psi(\lambda, \mu).$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |\lambda|^{2n} |\mu|^{2n} |\varphi(\lambda, \mu)|^2 \, d\lambda \, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\int |\psi(\lambda, \mu)|^2 \, d\lambda \, d\mu < \infty,$$

d'où pour la densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.8) découle la condition (3.4.19) du théorème 12.

Ainsi pour une densité $f(\lambda)$ du type (3.4.7), la condition (3.4.19) entraîne la condition (3.4.22) ; au contraire, pour une densité du type (3.4.8) la condition (3.4.22) entraîne (3.4.19), cette dernière condition signifiant que l'opérateur Δ dans l'espace hilbertien $L_T(F)$, défini par la fonction correspondante

$$b(s, t) = \langle \Delta e^{i\lambda s}, e^{i\lambda t} \rangle_F, \quad s, \ t \in T,$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Rappelons ici que la fonction $b(s, t)$ que nous étudions dépend seulement de la différence $s-t$ des variables s, t (voir la formule (3.4.15)).

Il est clair que la continuité absolue de la fonction $\frac{\partial^{2(n-1)} b(s, t)}{\partial s^{n-1}\, \partial t^{n-1}}$ (d'un couple de variables s, t) équivaut à l'existence de la dérivée $(2n-1)$-ième absolument continue $b^{(2n-1)}(t)$, $-\tau \leqslant t \leqslant \tau$ de la différence

$$b(t) = B(t) - B_1(t), \quad -\tau < t < \tau$$

des fonctions de corrélation $B(t)$ et $B_1(t)$ envisagées, la condition (3.4.22) signifiant que

$$\iint\limits_{T\times T} [b^{(2n)}(s-t)]^2\, ds\, dt < \infty. \tag{3.4.23}$$

On arrive définitivement au résultat suivant.

Théorème 13. *Pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la* σ*-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$ *dans le cas où la densité spectrale* $f(\lambda)$ *est du type* (3.4.7) *il faut que la différence des fonctions de corrélation* $b(t) = B(t) - B_1(t)$ *ait sur l'intervalle* $(-\tau, \tau)$ *des dérivées jusqu'à l'ordre* $2n-1$, *sa dérivée* $(2n-1)$*-ième* $b^{(2n-1)}(t)$ *étant absolument continue et sa dérivée* $b^{(2n)}(t)$ *(existant pour presque tous les* t*) satisfaisant à la condition* (3.4.23). *Lorsque la densité spectrale* $f(\lambda)$ *est du type* (3.4.8), *ces conditions sont suffisantes pour l'équivalence.*

Notons que d'après le théorème 13, pour une densité spectrale du type

$$f(\lambda) \asymp (1+\lambda^2)^{-n} \tag{3.4.24}$$

la condition (3.4.23) est nécessaire et suffisante pour l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$*).

Exemple. Soit $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{(\lambda^2+\alpha^2)}$, où σ^2 et α sont des paramètres positifs. La fonction de corrélation $B(t)$ est

$$B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}.$$

Supposons que la fonction de corrélation $B_1(t)$ soit telle que

$$B_1(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{pour } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour } |t| > 1 \end{cases}$$

(voir fig. 1). La densité spectrale correspondante est

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}.$$

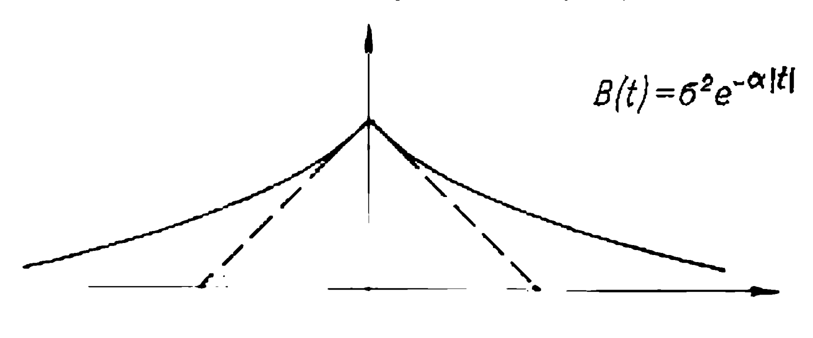
On voit que la condition (3.4.23) se trouve satisfaite (pour $n = 1$) si les paramètres σ^2, α et τ sont tels que $\sigma^2\alpha = 1$, $\tau \leqslant 1$. Avec cette

*) Pour la condition (3.4.23) voir G. Feldman, *Some classes of equivalent Gaussian processes on an interval*, Pacif. J. Math., **10** (1960) 1200–1220.

condition les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ (T), $T = [0, \tau]$. Pour d'autres valeurs de σ^2, α et τ ces mesures peuvent être orthogonales.

Les porteurs disjoints des mesures orthogonales **P** et $\mathbf{P}_1$ ont été décrits au point 2 du § 1.

3. Certaines conditions spectrales d'équivalence. La condition (3.4.23) obtenue ci-dessus montre que l'équivalence des mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ sur la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ (T) (où T est un segment fini



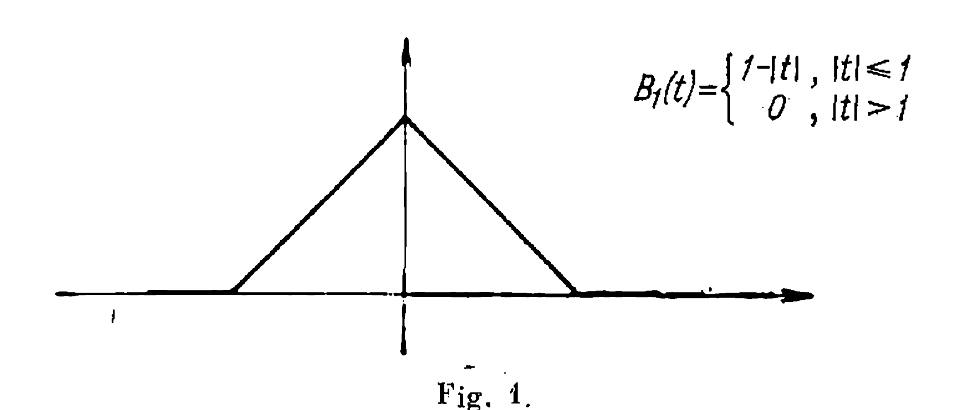


Fig. 1.

quelconque) ne dépend que du comportement des densités spectrales à l'infini, plus exactement, pour la densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.8) on a:

Théorème 14. *Une variation arbitraire de $f(\lambda)$ sur un intervalle fini quelconque (telle que la densité spectrale devienne $f_1(\lambda)$) conduit à la mesure gaussienne* $\mathbf{P}_1$ *équivalente à la mesure initiale* **P**.

Démonstration. En effet, dans ce cas la différence des fonctions de corrélation est la transformée de Fourier de la fonction à support borné $g(\lambda) = f(\lambda) - f_1(\lambda)$:

$$b(t) = \int e^{i\lambda t} g(\lambda)\, d\lambda \qquad (3.4.25)$$

et possède les dérivées de tous les ordres, de telle sorte qu'en particulier, pour tout segment fini T on a la condition d'équivalence (3.4.23).

Ceci permet de généraliser les résultats obtenus plus haut au cas où la densité spectrale $f(\lambda)$ satisfait à la condition (3.4.10), moins forte que (3.4.8) :

$$\varliminf_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\,|\lambda|^{2n} > 0.$$

Par exemple, le théorème 9 peut être renforcé de la manière suivante.

Théorème 15. *Lorsque la densité spectrale $f(\lambda)$ est du type* (3.4.10), *pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *différant par leur valeur moyenne $a(t)$, $t \in T$ (où T est un segment quelconque), il faut et il suffit que la fonction $a(t)$, $t \in T$, puisse être prolongée en une fonction $a(t)$, $-\infty < t < \infty$, de carré intégrable, dont la transformée de Fourier pour $R < \infty$ quelconque satisfasse à la condition suivante :*

$$\int\limits_{|\lambda|>R} \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{f(\lambda)}\,d\lambda < \infty. \tag{3.4.26}$$

Démonstration. Supposons que $\tilde{f}(\lambda)$ satisfasse à la condition (3.4.8) et coïncide avec $f(\lambda)$ pour $|\lambda| > R$. Soit $\tilde{\mathbf{P}}$ une mesure gaussienne de valeur moyenne nulle et de densité spectrale $\tilde{f}(\lambda)$. Comme nous l'avons signalé plus haut, les mesures $\mathbf{P}$ et $\tilde{\mathbf{P}}$ sont équivalentes, alors l'équivalence de $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ revient à l'équivalence de $\mathbf{P}_1$ et $\tilde{\mathbf{P}}$. Mais d'après le théorème 9 pour l'équivalence de $\mathbf{P}_1$ et $\tilde{\mathbf{P}}$ il faut et il suffit que soit satisfaite la condition (3.4.6)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda < \infty,$$

qui en vertu de la relation

$$\tilde{f}(\lambda) \asymp 1 \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leqslant R,$$

équivaut à

$$\int\limits_{|\lambda|>R} \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda < \infty,$$

ce qui nous donne la condition (3.4.26) car $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda)$ pour $|\lambda| > R$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Considérons des densités spectrales $f(\lambda)$ satisfaisant à la condition (3.4.9) plus faible que (3.4.7), soit :

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} f(\lambda)\,|\lambda|^{2n} < \infty.$$

Toute densité $f(\lambda)$ de ce type coïncide avec une densité $\tilde{f}(\lambda)$ du type (3.4.7) pour des $|\lambda|$ suffisamment grands :

$$f(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) \quad \text{pour} \quad |\lambda| > R.$$

En procédant, comme lors de la démonstration du théorème 15, par introduction d'une mesure gaussienne correspondante $\widetilde{\mathbf{P}}$, on peut généraliser le théorème 10 comme suit :

la condition (3.4.11) *est nécessaire pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *si la densité spectrale* $f(\lambda)$ *satisfait à la condition* (3.4.9).

D'une manière analogue, pour une densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.10) on peut trouver une densité $\tilde{f}(\lambda)$ telle qu'elle satisfasse à la relation (3.4.8) et coïncide avec $f(\lambda)$ pour $|\lambda| > R$. On en tire que

la condition (3.4.11) *est suffisante pour l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *si la densité spectrale* $f(\lambda)$ *satisfait à la relation* (3.4.10).

Soient maintenant les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ de valeurs moyennes nulles et de densités spectrales $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$, dont $f(\lambda)$ est bornée et appartient au type (3.4.10).

Comme précédemment, considérons la mesure gaussienne $\widetilde{\mathbf{P}}$ de densité spectrale bornée $\tilde{f}(\lambda)$ du type (3.4.8) coïncidant avec $f(\lambda)$ à l'extérieur d'un intervalle quelconque $|\lambda| \leqslant R$. Les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\widetilde{\mathbf{P}}$ étant équivalentes, pour que le soient les mesures initiales $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ il faut et il suffit que les mesures $\mathbf{P}_1$ et $\widetilde{\mathbf{P}}$ aient cette propriété. Pour l'équivalence des mesures gaussiennes $\mathbf{P}_1$ et $\widetilde{\mathbf{P}}$ il faut et il suffit que la condition (3.4.19) soit vérifiée

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{|\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)|^2}{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\mu)}\, d\lambda\, d\mu < \infty,$$

où $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ est la transformée de Fourier d'un prolongement de la fonction

$$\tilde{b}(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} [\tilde{f}(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda, \quad t \in T.$$

Comme $\tilde{f}(\lambda) \asymp 1$ pour $|\lambda| \leqslant R$ et $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda)$ pour $|\lambda| > R$, cette condition équivaut à

$$\int_{|\lambda|>R}\int_{|\mu|>R} \frac{|\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) f(\mu)}\, d\lambda\, d\mu < \infty. \qquad (3.4.27)$$

Mais la fonction $\tilde{b}(s, t)$ pour $s, t \in T$ ne diffère de la fonction

$$b(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} [f(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda$$

que par le terme

$$c(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} [\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)]\, d\lambda.$$

La différence $f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)$ s'annulant pour $|\lambda| > R$, la fonction $c(s, t)$ est infiniment dérivable et donc son prolongement au-delà du carré $T \times T$ est tel que la transformée de Fourier $\psi(\lambda, \mu)$ satisfasse à la condition

$$\iint |\lambda|^{2n} |\mu|^{2n} |\psi(\lambda, \mu)|^2 d\lambda\, d\mu < \infty,$$

n désignant ici la même chose que dans la relation (3.4.10). Il est évident que si la fonction $\tilde{\varphi}(\lambda, \mu)$ satisfait à la condition (3.4.27), la fonction

$$\varphi(\lambda, \mu) = \tilde{\varphi}(\lambda, \mu) + \psi(\lambda, \mu),$$

qui est la transformée de Fourier du prolongement adéquat de la fonction

$$b(s, t) = \tilde{b}(s, t) + c(s, t), \quad s, t \in T,$$

satisfera à la condition suivante:

$$\int\limits_{|\lambda|>R} \int\limits_{|\mu|>R} \frac{|\varphi(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) f(\mu)} d\lambda\, d\mu < \infty \qquad (3.4.28)$$

et inversement, si la transformée de Fourier $\varphi(\lambda, \mu)$ d'un certain prolongement de la fonction $b(s, t)$ satisfait à la condition (3.4.28), il en sera de même pour la fonction $\tilde{b}(s, t)$, c'est-à-dire que les mesures gaussiennes $\mathbf{P}_1$ et $\tilde{\mathbf{P}}$ seront équivalentes.

Nous sommes arrivés à la généralisation suivante du théorème 12.

Théorème 16. *Sous la condition* (3.4.10), *pour que les mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *soient équivalentes sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$, *T étant un segment quelconque de longueur finie, il faut et il suffit que la différence de leurs fonctions de corrélation* $b(s, t)$, $s, t \in T$, *puisse être prolongée en une fonction* $b(s, t)$, $-\infty < s, t < \infty$, *de carré intégrable dont la transformée de Fourier* $\varphi(\lambda, \mu)$ *satisfasse à la condition* (3.4.28) *pour R quelconque.*

Il en découle immédiatement que le théorème 13 est vrai non seulement pour des densités spectrales $f(\lambda)$ satisfaisant respectivement aux conditions (3.4.7) et (3.4.8) mais également pour des densités du type plus général vérifiant les conditions (3.4.9) ou (3.4.10). En particulier,

pour une densité spectrale $f(\lambda)$ du type

$$0 < \varliminf_{\lambda \to \infty} f(\lambda) |\lambda|^{2n} \leqslant \varlimsup_{\lambda \to \infty} f(\lambda) |\lambda|^{2n} < \infty \qquad (3.4.29)$$

la condition (3.4.23) *est nécessaire et suffisante à l'équivalence des mesures gaussiennes* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$.

Toute densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.29) est telle que

$$f(\lambda) \asymp |\varphi(\lambda)|^2 \qquad (3.4.30)$$

pour des $|\lambda|$ suffisamment grands, où $\varphi(\lambda)$ est la transformée de Fourier d'une certaine fonction à support borné de carré intégrable:

$$\varphi(\lambda) = \int e^{i\lambda t} c(t)\, dt$$

avec $c(t) = 0$ à l'extérieur d'un certain intervalle fini. Nous montrerons plus loin que toute densité $f(\lambda)$ telle que pour $r > 1$

$$0 < \varliminf_{\lambda \to \infty} f(\lambda)\,|\lambda|^r \leqslant \varlimsup_{\lambda \to \infty} f(\lambda)\,|\lambda|^r < \infty \tag{3.4.31}$$

satisfait à la condition (3.4.30) (rappelons que $f(\lambda)$ est une fonction intégrable).

En effet, le produit de fonctions quelconques du type (3.4.30) appartient lui aussi à ce type, car

$$f_1(\lambda)\, f_2(\lambda) \asymp |\varphi_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)|^2,$$

où

$$\varphi_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda) = \int e^{i\lambda t} [c_1(t) * c_2(t)]\, dt$$

est la transformée de Fourier de la fonction à support borné

$$c_1(t) * c_2(t) = \int c_1(t-s)\, c_2(s)\, ds$$

qui est la convolution des fonctions à support borné $c_1(t)$ et $c_2(t)$. Il suffit de montrer donc que sont du type (3.4.30) toutes les fonctions $f(\lambda)$ satisfaisant à la condition (3.4.31) pour $0 < r < 1$. Posons

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda t}\, |t|^{r-1}\, dt = 2 \int_{0}^{\delta} \cos \lambda t \cdot t^{r-1}\, dt.$$

Après le changement de variables $\lambda t = u$ on a

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda^{-r} \int_{0}^{\lambda\delta} \cos u \cdot u^{r-1}\, du \sim k\lambda^{-r}$$

(pour $\lambda \to \infty$) car il existe la limite

$$k = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \cos u \cdot u^{r-1}\, du \qquad (0 < r < 1).$$

On voit que pour la densité spectrale $f(\lambda)$ du type (3.4.31) on a la relation (3.4.30).

Théorème 17. *Si les densités spectrales sont du type* (3.4.30), *pour l'équivalence des mesures gaussiennes* **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sur la σ-algèbre* $\mathfrak{A}(T)$, *où T est un segment fini, il suffit que la fonction*

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{f(\lambda)}$$

pour un $R < \infty$ *quelconque satisfasse à la condition* *)

$$\int\limits_{|\lambda| > R} |h(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty. \qquad (3.4.32)$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où la fonction

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{f(\lambda)}$$

est de carré intégrable et

$$f(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2,$$

où $\varphi(\lambda)$ est la transformée de Fourier d'une certaine fonction $c(t)$ à support borné. Nous allons trouver un prolongement de la différence des fonctions de corrélation

$$b(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)} h(\lambda) f(\lambda) \, d\lambda$$

satisfaisant à la condition (3.4.19) du théorème 12.

Etant donné que la transformée de Fourier du produit coïncide avec la convolution des transformées des facteurs, on a

$$b(s, t) = \int \int a(u - v) \, c(s - u) \, c(t - v) \, du \, dv,$$

où $a(t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $h(\lambda)$. Dans cette représentation de la fonction $b(s, t)$, $s, t \in T$, les fonctions à support borné $c(s - u)$ et $c(t - v)$ s'annulent quand les variables u et v se trouvent à l'extérieur d'un certain segment T', de telle sorte que

$$b(s, t) = \iint\limits_{T' \times T'} a(u - v) \, c(s - u) \, c(t - v) \, du \, dv, \quad s, t \in T.$$

Choisissons un prolongement $a(u, v)$, $-\infty < u, v < \infty$, de la fonction $a(u - v)$, $u, v \in T'$, tel que la fonction $a(u, v)$ soit de carré intégrable dans tout le plan, et désignons par $\psi(\lambda, \mu)$ sa

---

*) Notons que si $h(\lambda) \to 0$ avec $\lambda \to \infty$, en même temps que $f(\lambda)$ appartient au type (3.4.30) la densité spectrale $f_1(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) \asymp f(\lambda)$$

pour des λ suffisamment grands.

transformée de Fourier. Définissons la fonction $b(s, t)$, $-\infty < s, t < \infty$, pour tous les s, t en posant

$$b(s, t) = \int\int a(u, v)\, c(s-u)\, c(t-v)\, du\, dv, \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Il est évident que pour $s, t \in T$ elle coïncide avec la différence des fonctions de corrélation et sa transformée de Fourier

$$\varphi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu)\, |\varphi(\lambda)|^2$$

satisfait à la condition (3.4.19). Donc dans le cas envisagé les mesures gaussiennes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont équivalentes.

Considérons maintenant le cas d'une densité $f(\lambda)$ quelconque du type (3.4.30) supposant pour le moment que

$$f_1(\lambda) \geqslant f(\lambda).$$

Il est clair que, pour des λ suffisamment grands ($|\lambda| > R$, par exemple) la densité spectrale $f(\lambda)$ est telle que

$$f(\lambda) \asymp \tilde{f}(\lambda) \text{ et } f(\lambda) \geqslant \tilde{f}(\lambda),$$

où $\tilde{f}(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2$ est la densité spectrale du type envisagé et $\varphi(\lambda)$ la transformée de Fourier d'une certaine fonction à support borné. Sans restreindre la généralité, on peut considérer que $f(\lambda) = f_1(\lambda)$ pour $|\lambda| \leqslant R$, car toute mesure gaussienne de densité spectrale ne différant de $f(\lambda)$ que sur un intervalle fini sera équivalente à la mesure gaussienne $\mathbf{P}$. Lorsqu'on choisit ainsi $f(\lambda)$, la fonction $h(\lambda)$ satisfaisant à (3.4.32) sera de carré intégrable car $h(\lambda) = 0$ pour $|\lambda| \leqslant R$. Posons

$$\tilde{f}_1(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) + [f_1(\lambda) - f(\lambda)].$$

Il est évident que

$$\tilde{h}(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}_1(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} = \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} = h(\lambda)\frac{f(\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} \asymp h(\lambda)$$

et la fonction $\tilde{h}(\lambda)$ est de carré intégrable. Comme nous l'avons déjà montré, les mesures gaussiennes $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}_1$ correspondant aux densités spectrales $\tilde{f}(\lambda)$ et $\tilde{f}_1(\lambda)$ seront équivalentes. Donc pour un certain prolongement de la différence des fonctions de corrélation

$$b(s, t) = \int e^{i\lambda(s-t)}\, [\tilde{f}(\lambda) - \tilde{f}_1(\lambda)]\, d\lambda =$$
$$= \int e^{i\lambda(s-t)}\, [f(\lambda) - f_1(\lambda)]\, d\lambda, \quad s, t \in T,$$

la transformée de Fourier correspondante $\varphi(\lambda, \mu)$ satisfera à la condition (3.4.28):

$$\int\limits_{|\lambda|>R}\int\limits_{|\mu|>R} \frac{|\varphi(\lambda, \mu)|^2}{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\mu)}\, d\lambda\, d\mu < \infty$$

et d'autant plus à la condition

$$\int\limits_{|\lambda|>R}\int\limits_{|\mu|>R} \frac{|\varphi(\lambda, \mu)|^2}{f(\lambda) f(\mu)} d\lambda\, d\mu < \infty$$

car $f(\lambda) \geqslant \tilde{f}(\lambda)$ pour $|\lambda| > R$. On voit que pour les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$ la condition d'équivalence (3.4.23) figurant dans le théorème 16 se trouve remplie.

Pour terminer la démonstration il nous reste à enlever la restriction temporaire $f_1(\lambda) \geqslant f(\lambda)$. Nous pouvons considérer par exemple la mesure gaussienne $\mathbf{P}_2$ de densité spectrale $f_2(\lambda) = f(\lambda) + \max[0, f_1(\lambda) - f(\lambda)]$. Il est évident que $f_2(\lambda) \geqslant f(\lambda)$, $f_2(\lambda) \geqslant f_1(\lambda)$ et pour un certain $R < \infty$ on a une condition du type (3.4.32):

$$\int\limits_{|\lambda|>R} \left(\frac{f_2(\lambda) - f(\lambda)}{f(\lambda)}\right)^2 d\lambda < \infty, \qquad \int\limits_{|\lambda|>R} \left(\frac{f_2(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}\right)^2 d\lambda < \infty,$$

car $f(\lambda) \asymp f_1(\lambda)$ pour des λ suffisamment grands. Les raisonnements précédents permettent d'affirmer que les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_2$ ainsi que les mesures gaussiennes $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont équivalentes. Par conséquent le sont les mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Remarquons en conclusion que la condition (3.4.32) est très proche de la condition nécessaire de l'équivalence des mesures gaussiennes **P** et $\mathbf{P}_1$. Notamment comme nous l'avons montré au point 2 du § 1 du présent chapitre, pour des densités spectrales du type général (3.4.31)

les mesures gaussiennes **P** *et* $\mathbf{P}_1$ *sont orthogonales, si la fonction correspondante*

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{f(\lambda)}$$

est telle que

$$\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda)\, \lambda^{1/2} = \infty \tag{3.4.33}$$

(ce qui découle d'ailleurs des relations du type (1.7.10)).

CHAPITRE IV

CONDITIONS DE RÉGULARITÉ DES PROCESSUS ALÉATOIRES STATIONNAIRES

§ 1. Introduction. Notions préliminaires

Considérons un processus aléatoire $\xi(t)$, stationnaire au sens strict, à temps t continu ou discret. Comme auparavant, désignons par $\mathfrak{A}(T)$ la σ-algèbre des événements engendrés par ce processus sur l'ensemble T, c'est-à-dire que $\mathfrak{A}(T)$ est la σ-algèbre minimale contenant les événements du type

$$\{\xi(t_1) \in E_1, \ldots, \xi(t_s) \in E_s\}, \quad t_1, \ldots, t_s \in T,$$

E_j étant les ensembles de Borel sur la droite réelle *). Les algèbres du type $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ déterminent le passé du processus (avant l'instant t), les algèbres $\mathfrak{A}(t, \infty)$ son futur (après l'instant t).

Si pour $\tau > 0$ quelconque les σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ et $\mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$ sont indépendantes, pour tous les $A \in \mathfrak{A}(-\infty, t)$, $B \in \mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$ on a

$$\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = 0. \qquad (4.1.1)$$

Dans le cas général le premier membre de cette égalité (ou des grandeurs analogues) peut servir de mesure de la dépendance entre les σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ et $\mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$. On utilise couramment différentes conditions de régularité, exprimant l'affaiblissement de la dépendance entre $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ et $\mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$ avec l'augmentation de τ lorsqu'il y a lieu de généraliser aux processus stationnaires les théorèmes connus pour les suites de variables aléatoires indépendantes **). Les plus fréquemment utilisées sont les conditions de régularité suivantes.

---

*) C'est exclusivement pour plus de simplicité que nous nous limitons aux processus réels. Tous les théorèmes suivants sont également vrais pour des processus complexes. Il faut seulement avoir en vue que pour des processus gaussiens complexes on a $\mathbf{M}\xi(t)\,\xi(s) = 0$ pour tous les t, s (voir [12]). Cependant si l'on se borne à l'étude de l'espace hilbertien $H(-\infty, \infty)$ aucune différence n'apparaît pour des processus complexes et il nous sera plus commode d'étudier cet espace sur le champ des nombres complexes.

**) Voir, par exemple, [14], [22].

1. Un processus stationnaire $\xi(t)$ est dit *régulier* si la σ-algèbre

$$\mathfrak{A}(-\infty, -\infty) = \mathfrak{A}(-\infty) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_t \mathfrak{A}(-\infty, t)$$

est triviale, c'est-à-dire qu'elle ne contient que des événements de probabilité 0 et 1.

Notons que cette condition peut s'écrire de la manière suivante en termes de la différence $\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$: pour tous les $B \in \mathfrak{A}(-\infty, \infty)$ on a

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}(-\infty, t)} |\mathbf{P}(AB - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)| \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0. \qquad (4.1.2)$$

En effet, supposons que le processus $\xi(t)$ soit régulier. Désignons par χ_A l'indicateur de l'événement A, c'est-à-dire

$$\chi_A = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Supposons ensuite que les variables aléatoires η_1, η_2 soient définies par les égalités $\eta_1 = \chi_A - \mathbf{P}\{A\}$, $\eta_2 = \chi_B - \mathbf{P}\{B\}$. On a alors

$$\mathbf{M}\eta_1\eta_2 = \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B).$$

La variable aléatoire η_1 est mesurable par rapport à $\mathfrak{A}(-\infty, t)$, par conséquent

$$\mathbf{M}\eta_1\eta_2 = \mathbf{M}\{\eta_1\}\,\mathbf{M}\{\eta_2 \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)\} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{M}\eta_1^2)^{1/2}\,[\mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_2 \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)))^2]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_2 \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)))^2 \xrightarrow[t \to -\infty]{} \mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_2 \mid \mathfrak{A}(-\infty)))^2 = 0.$$

Inversement, supposons que le processus $\xi(t)$ ne soit pas régulier. La σ-algèbre $\mathfrak{A}(-\infty)$ n'est pas triviale et contient au moins un événement A pour lequel $0 < \mathbf{P}\{A\} < 1$. Quel que soit t on a $A \in \mathfrak{A}(-\infty, t)$ de sorte que

$$\sup_{B \in \mathfrak{A}(-\infty, t)} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)| \geqslant \mathbf{P}\{A\} - \mathbf{P}^2\{A\} \not\to 0.$$

Si dans (4.1.1) on prend le suprémum également par rapport à $B \in \mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$ on obtient la condition suivante.

2. Un processus stationnaire $\xi(t)$ satisfait à la *condition de mélange intense* *) si

$$\alpha(\tau) = \sup_{A \in \mathfrak{A}(-\infty, t),\ B \in \mathfrak{A}(t+\tau, \infty)} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)| \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0. \qquad (4.1.3)$$

---

*) La condition de mélange intense doit sa popularité au rôle qu'elle a joué dans les théorèmes limites pour les grandeurs faiblement liées (voir, par exemple, [14], [22]); pour la première fois elle paraît avoir été utilisée par Rosenblatt (voir M. Rosenblatt, *A central limit theorem and strong mixing condition*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956)).

La grandeur $\alpha(\tau)$ caractérise la « vitesse de mélange » et s'appelle *coefficient de mélange*.

3. On dit qu'un processus $\xi(t)$ est *absolument régulier* si

$$\beta(\tau) = \mathbf{M} \sup_{A \in \mathfrak{A}(t+\tau,\, \infty)} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)\} - \mathbf{P}\{A\}| \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0. \quad (4.1.4)$$

La grandeur $\beta(\tau)$ est appelée *coefficient de régularité* (absolue).

Il est facile de voir que $\alpha(\tau) \leqslant \beta(\tau)$.

En effet, pour tous les $A \in \mathfrak{A}(t+\tau, \infty)$, $B \in \mathfrak{A}(-\infty, t)$ on a l'inégalité

$$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| = \left| \int_B (\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)\} - \mathbf{P}\{A\}\, d\mathbf{P} \right| \leqslant \beta(\tau).$$

Ainsi, la régularité absolue impose au processus $\xi(t)$ des contraintes beaucoup plus fortes que la condition de mélange. En remplaçant dans (4.1.4) le moyennage sur tout l'espace des événements élémentaires Ω par la recherche du suprémum, on arrive à une condition encore plus restringente.

4. Un processus $\xi(t)$ satisfait à la condition *de mélange intense uniforme* si

$$\varphi(\tau) = \operatorname{vrai\,sup}_{\omega \in \Omega} \sup_{A \in \mathfrak{A}(t+\tau,\, \infty)} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}(-\infty, t)\} - \mathbf{P}\{A\}| \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0. \quad (4.1.5)$$

Il est facile de vérifier que

$$\varphi(\tau) = \sup_{A \in \mathfrak{A}(t+\tau,\, \infty),\; B \in \mathfrak{A}(-\infty,\, t)} \frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)}.$$

Une autre définition de la régularité est liée à la notion de *quantité d'information*.

Soient $\{\xi_1(t),\ t \in T\}$ et $\{\xi_2(s),\ s \in S\}$ deux processus aléatoires quelconques (deux familles de variables aléatoires). Désignons par $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ les σ-algèbres minimales des événements engendrées respectivement par $\{\xi_1(t),\ t \in T\}$, $\{\xi_2(s),\ s \in S\}$. La quantité d'information sur le processus aléatoire $\{\xi_1(t),\ t \in T\}$ contenue dans le processus $\{\xi_2(s),\ s \in S\}$ est donnée par la grandeur

$$I(\xi_1, \xi_2) = \sup \sum \mathbf{P}(A_i B_j) \ln \frac{\mathbf{P}(A_i B_j)}{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B_j)}, \quad (4.1.6)$$

où le suprémum est pris sur toutes les partitions possibles de l'espace des issues élémentaires Ω en des événements disjoints $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ avec $A_i \in \mathfrak{A}_1$ et $B_j \in \mathfrak{A}_2$. Il est facile de voir que $I(\xi_1, \xi_2) = I(\xi_2, \xi_1)$. En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $x \ln x$, $x > 0$, on peut montrer que $I(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$, l'égalité $I(\xi_1, \xi_2) = 0$ ayant lieu si et seulement si les σ-algèbres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont indépendantes *).

*) Voir, par exemple, [19].

En calculant la quantité d'information que contient le passé $\{\xi(s),\ s \leqslant t\}$ du processus $\xi(t)$ sur son futur $\{\xi(s),\ s \geqslant t+\tau\}$ on arrive à la définition suivante.

5. On dit qu'un processus $\xi(t)$ est *informativement régulier* si

$$I(\tau) = I\{(\xi(s),\ s \leqslant t),\ (\xi(s),\ s \geqslant t+\tau)\} \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (4.1.7)$$

La grandeur $I(\tau)$ est parfois appelée *coefficient informationnel de régularité.*

Remarquons ensuite que le premier membre de l'égalité (4.1.1) peut s'écrire comme $\mathbf{M}\eta_1\eta_2$, où $\eta_1 = \chi_A - \mathbf{P}\{A\}$, $\eta_2 = \chi_B - \mathbf{P}\{B\}$. En n'exigeant des variables aléatoires η_1, η_2 que d'avoir $\mathbf{M}\eta_1$, η_2 pour espérance mathématique, on arrive à la notion importante suivante de *coefficient de corrélation maximal* entre les systèmes de variables aléatoires $\{\xi_1(t),\ t \in T\}$ et $\{\xi_2(s),\ s \in S\}$ défini comme

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sup \mathbf{M}\eta_1\eta_2,$$

où le suprémum est pris sur tous les η_1, η_2 mesurables respectivement par rapport aux σ-algèbres $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ et tels que

$$\mathbf{M}\eta_1 = \mathbf{M}\eta_2 = 0,\ \mathbf{M}|\eta_1|^2 = \mathbf{M}|\eta_2|^2 = 1.$$

Cette notion a un sens géométrique simple. Désignons par $\boldsymbol{H}$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires η d'espérance mathématique finie $\mathbf{M}|\eta|^2$; $\boldsymbol{H}$ est ici l'espace hilbertien de produit scalaire $(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{M}\eta_1\eta_2$. Si $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_2$ sont les sous-espaces de $\boldsymbol{H}$ formés de variables aléatoires, mesurables respectivement par rapport à $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$, alors $r(\xi_1, \xi_2)$ est le cosinus de l'angle minimal entre $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_2$ (comparer avec 2' ci-dessous).

La notion de coefficient de corrélation maximal donne dans le cas d'un processus stationnaire $\xi(t)$ la *condition* suivante *de régularité complète.*

6.

$$r(\tau) = r((\xi(s),\ s \leqslant t),\ (\xi(s),\ s \geqslant t+\tau)) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (4.1.8)$$

Sous la condition (4.1.8) le processus aléatoire $\xi(t)$ sera dit *complètement régulier.*

Evidemment, on a toujours $r(\tau) \geqslant \alpha(\tau)$. On connaît d'ailleurs que pour les processus gaussiens stationnaires *)

$$\alpha(\tau) \leqslant r(\tau) \leqslant 2\pi\alpha(\tau), \quad (4.1.9)$$

donc

un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ satisfait à la condition de mélange intense si et seulement s'il est complètement régulier.

*) Voir [22], page 249.

Comme dans cet ouvrage nous nous limitons à l'étude des processus gaussiens, il est tout naturel d'essayer d'exprimer les conditions 1 à 6 en termes spectraux, vu que dans ce cas la fonction spectrale ou la fonction de corrélation déterminent entièrement le processus. Il est clair qu'alors les conditions 1 à 6 doivent admettre une formulation équivalente en termes des espaces $H(T)$ et que cette formulation sera vraie pour des processus quelconques, stationnaires au sens général. Pour ces processus l'orthogonalité joue le rôle d'indépendance, à la place des σ-algèbres $\mathfrak{A}(T)$ on envisage les espaces $H(T)$ et l'opérateur donnant l'espérance mathématique conditionnelle $\mathbf{M}\{\cdot \mid \mathfrak{A}(T)\}$ se trouve remplacé par l'opérateur de projection $\hat{\mathbf{M}}\{\cdot \mid H(T)\}$, dans l'espace hilbertien H, sur le sous-espace $H(T)$.

Soit $\xi(t)$, $\mathbf{M}\xi(t) \equiv 0$, un processus aléatoire stationnaire au sens général.

1'. Le processus $\xi(t)$ est dit (*linéairement*) *régulier* si l'espace

$$H(-\infty, -\infty) = H(-\infty) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_t H(-\infty, t)$$

est trivial, c'est-à-dire se compose de variables aléatoires égales à 0 avec une probabilité 1.

D'une manière analogue à (4.1.2), pour que le processus $\xi(t)$ soit linéairement régulier il faut et il suffit que

$$\|\hat{\mathbf{M}}\{\eta \mid H(-\infty, -\tau)\}\| = \mathbf{M}^{1/2}\{(\hat{\mathbf{M}}\{\eta \mid H(-\infty, -\tau)\})^2\} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0. \qquad (4.1.10)$$

On comprend aisément que si $\xi(t)$ est régulier au sens de la définition 1, il est également linéairement régulier.

La condition de régularité linéaire joue un rôle très important dans la théorie du pronostic des processus aléatoires stationnaires. L'un des résultats fondamentaux de cette théorie dit ceci : pour qu'un processus $\xi(t)$ stationnaire au sens général soit linéairement régulier il faut et il suffit qu'il admette la représentation de Wold *)

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\zeta(s) \quad \left(\sum_{0}^{\infty} |c(t)|^2 < \infty\right) \qquad (4.1.11)$$

pour un temps t discret et

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} c(t-s)\,\zeta(ds) \quad \left(\int_{0}^{\infty} |c(t)|^2\,dt < \infty\right) \qquad (4.1.12)$$

pour un temps t continu, où $\zeta(ds)$ est la mesure stochastique orthogonale sur l'axe temporel : $\mathbf{M}\zeta(\Delta_1)\,\zeta(\Delta_2) = |\Delta_1 \cap \Delta_2|$, $|\Delta|$ désignant la longueur de l'intervalle temporel Δ. En vertu des for-

*) Voir, par exemple, [22], pages 77, 162.

mules (4.1.11), (4.1.12) la σ-algèbre $\mathfrak{A}(-\infty, t)$ se trouve contenue dans la σ-algèbre $\mathfrak{B}(-\infty, t)$ engendrée par les valeurs de $\zeta(\Delta)$ sur le demi-axe temporel $(-\infty, t)$ et

$$\bigcap_t \mathfrak{A}(-\infty, t) \subseteq \bigcap_t \mathfrak{B}(-\infty, t).$$

Dans le cas des processus gaussiens l'orthogonalité est équivalente à l'indépendance et $\zeta(ds)$ est une mesure stochastique à valeurs indépendantes (en particulier, pour t discret on a une suite de variables gaussiennes indépendantes $\zeta(s)$, $s = t, t-1, \ldots$). Dans ce cas en vertu de la loi de zéro ou un l'intersection $\bigcap_t \mathfrak{B}(-\infty, t)$ est triviale et par conséquent la linéarité régulière d'un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ entraîne sa régularité dans le sens de la définition 1. Ainsi,

pour qu'un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ soit régulier il faut et il suffit qu'il soit linéairement régulier.

Tous les processus stationnaires linéairement réguliers ont été décrits. Notamment

pour qu'un processus stationnaire $\xi(t)$ soit linéairement régulier il faut et il suffit que sa mesure spectrale soit absolument continue et que sa densité spectrale $f(\lambda)$ satisfasse à la condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, d\lambda > -\infty \tag{4.1.13}$$

pour un temps t discret et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty \tag{4.1.14}$$

pour un temps t continu (voir [22], p.p.85, 161 ou le § 2 du chapitre II).

Puis, tout comme on est passé de (4.1.1) à (4.1.2), on peut dans (4.1.10) prendre le suprémum sur η ; on arrive alors à la condition suivante.

2′. Le processus $\xi(t)$ est dit *complètement* (*linéairement*) *régulier* si

$$\rho(\tau) = \sup_{\eta \in H(0, \infty),\ \|\eta\|=1} \|\hat{\mathbf{M}}\{\eta \mid H(-\infty, -\tau)\}\| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0. \tag{4.1.15}$$

La grandeur $\rho(\tau)$ sera appelée *coefficient de régularité* (*linéaire*) *complète.*

Il est évident que l'on a toujours $\rho(\tau) \leqslant r(\tau)$. Mais dans le cas des processus gaussiens on a le résultat fondamental suivant *) :

$$\rho(\tau) = r(\tau). \tag{4.1.16}$$

Ce résultat signifie que

*) Voir [22], page 249.

un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ *est complètement régulier (au sens de la définition* 6) *si et seulement s'il est complètement linéairement régulier.*

Il est facile de voir que

$$\rho(\tau) = \sup |M\eta_1\overline{\eta}_2| = \sup |(\eta_1, \eta_2)|,$$

où le suprémum est pris sur tous les $\eta_1 \in H(-\infty, 0)$, $\eta_2 \in H(\tau, \infty)$ avec $M|\eta_1|^2 = M|\eta_2|^2 = 1$, donc $\rho(\tau)$ est le cosinus de l'angle minimal entre les sous-espaces $H(-\infty, -\tau)$, $H(\tau, \infty)$. Notons que la condition $\rho(\tau) < 1$ est plus forte que la régularité (linéaire).

En plus de l'angle minimal entre les sous-espaces $H(-\infty, t)$, $H(t+\tau, \infty)$ on peut introduire des caractéristiques analogues en se basant sur l'idée suivante.

Désignons par $\mathcal{P}_\tau^- (= \mathcal{P}_\tau)$ l'opérateur de projection dans H sur $H(-\infty, 0)$, par $\mathcal{P}_\tau^+$ le projecteur sur $H(\tau, \infty)$ et introduisons les opérateurs

$$B_\tau^- = B_\tau = \mathcal{P}_\tau^- \mathcal{P}_0^+ \mathcal{P}_\tau^-, \quad B_\tau^+ = \mathcal{P}_0^+ \mathcal{P}_\tau^- \mathcal{P}_0^+, \quad \tau \geqslant 0.$$

Pour que les sous-espaces $H(-\infty, 0)$, $H(\tau, \infty)$ soient orthogonaux il faut et il suffit que $B_\tau^\pm = 0$. Ceci conduit à considérer en tant que conditions de régularité la convergence des opérateurs B_τ vers zéro pour $\tau \to \infty$ suivant telle ou telle topologie (uniforme, de Hilbert-Schmidt, nucléaire) ; nous allons voir plus loin qu'on peut reformuler en ce sens toutes les conditions de régularité énumérées ci-dessus.

Les conditions de régularité exprimées en termes des espaces hilbertiens $H(T)$ admettent une formulation analytique, car il existe une correspondance isométrique $\xi(t) \leftrightarrow e^{i\lambda t}$ avec les sous-espaces $L_T(F)$ décrits au chapitre II. De plus, dans le cas des processus gaussiens, ceci concerne également les autres conditions (car par exemple $\rho(\tau) \asymp r(\tau) \asymp \alpha(\tau)$). Le présent chapitre ainsi que les deux suivants sont essentiellement consacrés à la transcription en langage analytique des conditions de régularité formulées ci-dessus et à la solution des problèmes analytiques apparaissant, afin d'obtenir les critères de régularité exprimés en fonction des caractéristiques spectrales.

§ 2. Conditions de régularité et opérateurs B_τ

Soit $\xi(t)$ un processus gaussien stationnaire. Considérons les opérateurs *) $B_\tau^- (=B_\tau)$ et B_τ^+ introduits au § 1. Ce sont des opéra-

*) Les opérateurs B_τ ont été introduits dans la théorie des processus aléatoires par I. Guelfand et A. Iaglom dans l'article « *Sur le calcul de la quantité d'information sur une fonction aléatoire, contenue dans une autre fonction aléatoire* », Uspekhi math. Nauk, **XII**, rec. 1 (1957). Pour la relation des opérateurs B_τ avec les conditions de régularité voir A. Jaglom, « *Stationary Gaussian processes satisfying the strong mixing condition and best predictable functionals* », Bernoulli-Bayes-Laplace, Anniv. volume Springer-Verlag, 1965).

teurs positifs auto-adjoints. Nous allons montrer que toutes les conditions de régularité formulées au § 1 pour un processus gaussien $\xi(t)$ peuvent s'exprimer en termes de convergence de B_τ vers zéro pour $\tau \to \infty$ (quel que soit le sens dans lequel on comprend la convergence).

Théorème 1. *Pour qu'un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ soit régulier il faut et il suffit que pour $\tau \to \infty$ les opérateurs B_τ convergent faiblement vers 0, c'est-à-dire que pour une variable aléatoire quelconque $\eta \in H(-\infty, \infty)$ on ait*

$$\| B_\tau \eta \| = \mathbf{M}^{1/2} | B_\tau \eta |^2 \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0.$$

Vu ce qui a été dit au § 1, on peut ne pas différencier entre la régularité et la régularité linéaire. Donc le théorème 1 découle immédiatement de la définition de la régularité linéaire et de l'inégalité $\| B_\tau \eta \| \leqslant \| \mathcal{P}_\tau \eta \|$.

Théorème 2. *Pour qu'un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ soit complètement régulier il faut et il suffit que les opérateurs B_τ convergent uniformément vers zéro, de plus, le coefficient de régularité est $\rho(\tau) = \| B_\tau \|$.*

De toute évidence ce théorème reste vrai pour des processus stationnaires quelconques si l'on considère des processus complètement linéairement réguliers. Pour des processus gaussiens, en vertu des relations (4.1.9), (4.1.16), ce théorème donne simultanément le critère de mélange intense.

Le théorème 2 découle immédiatement de la définition du coefficient de régularité $\rho(\tau)$. En effet, par définition, on a

$$\rho(\tau) = \sup_{\eta \in H(0, \infty),\ \|\eta\|=1} \| \mathcal{P}_\tau \eta \| = \sup (\mathcal{P}_\tau \mathcal{P}_0^+ \eta, \mathcal{P}_0^+ \eta)^{1/2} =$$
$$= \sup (B_\tau^+ \eta, \mathcal{P}_0^+ \eta) = \sup_{\eta \in H(-\infty, \infty),\ \|\eta\|=1} (B_\tau^- \eta, \eta) = \| B_\tau^- \| = \| B_\tau \|.$$

Pour des processus à temps discret on peut démontrer une variante plus intéressante de ce théorème.

Théorème 3. *Pour qu'un processus stationnaire $\xi(t)$ à temps discret soit complètement régulier il faut et il suffit qu'il soit régulier et que l'opérateur B_1 soit complètement continu.*

Lemme 1. *Soient H_1 et H_2 des sous-espaces d'un espace hilbertien H séparable. Désignons par $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ les opérateurs de projection dans H respectivement sur H_1 et H_2. Posons $B_1 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$, $B_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$. Si les opérateurs B_1, B_2 sont complètement continus, on peut choisir dans H_1 une base orthogonale $\{\{e_{1j}\} \oplus \{e'_{1k}\}\}$ et dans H_2 une base orthogonale $\{\{e_{2j}\} \oplus \{e'_{2k}\}\}$ ayant les propriétés suivantes:*

1) *tous les vecteurs e'_{1k} sont orthogonaux à H_2 et tous les vecteurs e'_{2k} orthogonaux à H_1;*

2) *les produits scalaires* (e_{1i}, e_{2j}) *sont différents de zéro si seulement* $i = j$;

3) e_{1j} *sont les vecteurs propres de l'opérateur* B_1, e_{2j} *de l'opérateur* B_2.

Démonstration du lemme. En vertu des propriétés élémentaires des opérateurs de projection $\mathcal{P}_i$: $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i^* = \mathcal{P}_i$, on obtient facilement que B_1 et B_2 sont des opérateurs auto-adjoints, simultanément complètement continus ou non. L'opérateur complètement continu auto-adjoint B_1 possède dans le domaine de ses valeurs une suite complète de vecteurs propres orthogonaux normés e_{11}, e_{12}, . . . correspondant à des valeurs propres λ_1, λ_2, . . . différentes de zéro (la complétude signifie que tout vecteur $\varphi = B_1 h$ orthogonal à tous les vecteurs e_{1j} est égal à zéro) *).

Posons $e_{2j} = \frac{\mathcal{P}_2 e_{1j}}{\| \mathcal{P}_2 e_{1j} \|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathcal{P}_2 e_{1j}$. Il est facile de voir que tous les e_{2j} sont des vecteurs propres de l'opérateur B_2 correspondant aux valeurs propres λ_j. En effet

$$B_2 e_{2j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 e_{1j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathcal{P}_2 B_1 e_{1j} = \lambda_1 e_{2j}.$$

En examinant les projections $\mathcal{P}_1 e_{2j}$ on s'assure que les vecteurs $\{e_{2j}\}$ sont les seuls vecteurs propres de l'opérateur B_2.

Supposons maintenant que les vecteurs orthonormés $\{e'_{1k}\}$ $(\{e'_{2k}\})$ sont le complément du système $\{e_{1j}\}$ $(\{e_{2j}\})$ jusqu'à une base dans H_1 (dans H_2). Nous allons montrer que les bases $\{\{e_{1j}\} \oplus \{e'_{1k}\}\}$ et $\{\{e_{2j}\} \oplus \{e'_{2k}\}\}$ ont les propriétés requises.

1) Montrons que tous les vecteurs e'_{1k} sont orthogonaux à H_2, c'est-à-dire que pour tous les k on a $\mathcal{P}_2 e'_{1k} = 0$. En effet,

$$\| \mathcal{P}_2 e'_{1k} \|^2 = (e'_{1k}, \mathcal{P}_2 e'_{1k}) = (\mathcal{P}_1 e'_{1k}, \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 e'_{1k}) = (e'_{1k}, B_1 e'_{1k}) = 0$$

car en raison de la complétude le vecteur $B_1 e'_{1k}$, orthogonal à tous les vecteurs e_{1j}, est égal à zéro. On peut montrer d'une manière analogue que pour tous les k on a $e'_{2k} \perp H_1$.

2) Calculons les produits scalaires (e_{1i}, e_{2j}). On a

$$\sqrt{\lambda_1} (e_{1i}, e_{2j}) = (\mathcal{P}_1 e_{1i}, \mathcal{P}_2 e_{1j}) = (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 e_{1i}, e_{1j}) = \\ = (B_1 e_{1i}, e_{1j}) = \lambda_1 (e_{1i}, e_{1j}) = \lambda_1 \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Démonstration du théorème 3. Supposons que l'opérateur B_1 soit complètement continu. Soient e_1, e_2, . . . ses vecteurs propres normés, et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant$ . . . les nombres propres correspondants. D'après le lemme 1 le complément de e_1, e_2, . . . jusqu'à une base dans $H(-\infty, -1)$ est orthogonal à $H(0, \infty)$,

*) Voir, par exemple, [2], page 189.

donc sans restreindre la généralité on peut considérer que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots$ eux-mêmes forment une base dans $H(-\infty, -1)$.

Soit un élément quelconque $\eta \in H(-\infty, -\tau)$ que nous allons écrire comme suit:

$$\eta = \sum_1^\infty a_j e_j$$

avec

$$|a_j| = |(\eta, e_j)| = |(\eta, \mathcal{P}_\tau e_j)| \leqslant \| \mathcal{P}_\tau e_j \|.$$

La régularité fait que pour j quelconque donné on a $\| \mathcal{P}_\tau e_j \| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$. Par conséquent

$$\| B_\tau \| = \sup_{\|\eta\|=1} \| \mathcal{P}_0^+ \eta \| = \sup_{\|\eta\|=1} \Big(\sum_{i,j} a_i \bar{a}_j (\mathcal{P}_0^+ e_i, \mathcal{P}_0^+ e_j) \Big)^{1/2} =$$

$$= \sup_{\|\eta\|=1} \Big(\sum_{i,j} a_i a_j (B_1 e_i, e_j) \Big)^{1/2} = \sup_{\|\eta\|=1} \Big(\sum_1^\infty |a_j|^2 \lambda_j \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1 s \max_{1\leqslant j\leqslant s} \| \mathcal{P}_\tau e_j \|^2 + \lambda_{s+1} = \lambda_{s+1} + o(1).$$

Vu que $\lim_s \lambda_s = 0$ la dernière expression peut être aussi petite que l'on veut.

Nous allons montrer que les conditions du théorème sont nécessaires. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que l'opérateur B_1 est complètement continu sur $H(-\infty, -1)$. Ecrivons l'espace $H(-\infty, -1)$ sous la forme $H(-\infty, -\tau) \oplus R_\tau$, où le complément orthogonal R_τ de l'espace $H(-\infty, -\tau)$ jusqu'à $H(-\infty, -1)$ est de dimension finie. Si l'on désigne par Q_τ le projecteur dans $H(-\infty, -1)$ sur R_τ, alors $\mathcal{P}_\tau + Q_\tau$ est un opérateur unitaire dans $H(-\infty, -1)$. Par conséquent

$$B_1 = (\mathcal{P}_\tau + Q_\tau) B_1 (\mathcal{P}_\tau + Q_\tau) = \mathcal{P}_\tau B_1 P_\tau + K_\tau = B_\tau + K_\tau,$$

où l'opérateur K_τ est de dimension finie. Mais alors on a

$$\| B_1 - K_\tau \| = \| B_\tau \| = \rho(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que l'opérateur B_1 peut être approché aussi bien que l'on veut par des opérateurs de dimension finie et donc est absolument continu *).

R e m a r q u e. En démontrant que les conditions du théorème sont suffisantes, nous avons démontré par là même un résultat plus général, à savoir:

---

*) Voir, par exemple, [5], page 47.

Soit $\xi(t)$ un processus gaussien stationnaire à temps discret ou continu, et supposons que pour $\tau > 0$ quelconque l'opérateur B_τ soit complètement continu ; dans ce cas le processus est complètement régulier.

Démontrons le théorème suivant.

Théorème 4. *Pour qu'un processus gaussien stationnaire soit absolument régulier il faut et il suffit qu'il soit régulier et que pour un τ_0 quelconque l'opérateur B_{τ_0} soit complètement continu et de trace finie *). Dans ce cas tous les opérateurs B_τ, $\tau \geqslant \tau_0$ sont de trace finie et le coefficient de régularité (absolue) est*

$$\beta(\tau) \asymp \sqrt{\operatorname{Sp} B_\tau}, \quad \tau \to 0, \tag{4.2.1}$$

où $\operatorname{Sp} B_\tau$ désigne la trace de l'opérateur B_τ. Plus exactement, si $\beta(\tau) \to 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \leqslant \varliminf_{\tau} \frac{\beta(\tau)}{\sqrt{\operatorname{Sp} B_\tau}} \leqslant \varlimsup_{\tau} \frac{\beta(\tau)}{\sqrt{\operatorname{Sp} B_\tau}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Démonstration **). Nous allons préalablement établir quelques propriétés générales du coefficient $\beta(\tau)$. Soit $\{\eta_1(u), u \in U; \eta_2(v), v \in V\}$ un système quelconque de variables aléatoires gaussiennes. Désignons par $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}$ les σ-algèbres des événements engendrées respectivement par les systèmes $\{\eta_1(u), u \in U\}$, $\{\eta_2(v), v \in V\}$, $\{\eta_1(u), \eta_2(v); u \in U, v \in V\}$. Soient ensuite H, H_1, H_2 les espaces linéaires tendus respectivement sur $\{\eta_1, \eta_2\}$, $\{\eta_1\}$, $\{\eta_2\}$. Désignons par $\hat{\mathscr{P}}_1$, $\hat{\mathscr{P}}_2$ les projecteurs dans H sur H_1, H_2. Soient enfin

$$\hat{B}_1 = \hat{\mathscr{P}}_1 \hat{\mathscr{P}}_2 \hat{\mathscr{P}}_1, \quad \hat{B}_2 = \hat{\mathscr{P}}_2 \hat{\mathscr{P}}_1 \hat{\mathscr{P}}_2.$$

Posons

$$\beta = \beta(\{\eta_1(u), \eta_2(v)\}) = \mathbf{M} \sup_{A \in \mathfrak{A}_2} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_1\} - \mathbf{P}\{A\}|.$$

Désignons par Q_1, Q_2, Q les mesures de probabilité engendrées sur les algèbres $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}$ par $\{\eta_1(u), u \in U; \eta_2(v), v \in V\}$. Notons $\widetilde{Q}$ la mesure de probabilité sur $\mathfrak{A}$ coïncidant sur $\mathfrak{A}_1$ avec la mesure Q_1, sur $\mathfrak{A}_2$ avec la mesure Q_2 et telle que les algèbres $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ soient indépendantes par rapport à la mesure Q (on peut poser $\widetilde{Q} = Q_1 \times Q_2$).

Lemme 2. *On a l'égalité*

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{Var}(Q - \widetilde{Q}).$$

---

*) C'est-à-dire nucléaire.

) Dans la démonstration sont utilisés certains résultats de l'article de V. Volkonski et Y. Rozanov « *Théorèmes limites dans le cas des fonctions aléatoires* ». Teoria veroïatnostei i eïe primenenia, **VI, n° 2 (1961), 202-215.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Nous allons tout d'abord montrer que

$$\frac{1}{2} \operatorname{Var}(Q-\widetilde{Q}) \leqslant \beta. \tag{4.2.2}$$

Il suffit de montrer que pour tous les événements C du type $C = \bigcup_i A_i B_i$, où $A_i \in \mathfrak{A}_1$, $B_i \in \mathfrak{A}_2$ et tous les $A_i B_i$ sont deux à deux incompatibles, on a l'inégalité

$$|Q(C) - \widetilde{Q}(C)| \leqslant \beta.$$

Si C est un événement du type mentionné on peut toujours l'écrire sous la forme $C = \bigcup_i A_i B_i'$, où B_i', B_j' sont cette fois deux événements quelconques soit incompatibles, soit coïncidant (tous les événements $A_i B_i'$ étant incompatibles). Au lieu de B_i' nous allons de nouveau écrire B_i. Comme $Q(C) > \widetilde{Q}(C)$ on a

$$Q(C) - \widetilde{Q}(C) = \sum_i [\mathbf{P}\{A_i B_i\} - \mathbf{P}\{A_i\} \mathbf{P}\{B_i\}] =$$
$$= \sum_i \int_{B_i} [\mathbf{P}\{A_i \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A_i\}]\, d\mathbf{P}. \tag{4.2.3}$$

Si $B_{i_1}, \ldots, B_{i_l}$ sont des événements quelconques coïncidant de la suite $B_1, B_2, \ldots$, les événements leur correspondant A_{i_s} sont disjoints et posant $\widetilde{A}_i = \bigcup_{s=1}^{l} A_{i_s}$ on trouve

$$\sum_s \int_{B_{i_s}} [\mathbf{P}\{A_{i_s} \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A_{i_s}\}]\, d\mathbf{P} = \int_{B_{i_1}} [\mathbf{P}\{\widetilde{A}_i \mid \mathfrak{A}_2\} -$$
$$- \mathbf{P}\{\widetilde{A}_i\}]\, d\mathbf{P}. \tag{4.2.4}$$

D'où on trouve compte tenu de (4.2.3)

$$Q(C) - \widetilde{Q}(C) = \sum_i \int_{\widetilde{B}_i} [\mathbf{P}\{\widetilde{A}_i \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{\widetilde{A}_i\}]\, d\mathbf{P},$$

où $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \ldots$ est une suite d'événements disjoints de $\mathfrak{A}$. Par conséquent

$$|Q(C) - \widetilde{Q}(C)| \leqslant \sum_i \int_{\widetilde{B}_i} \sup_{A \in \mathfrak{A}_1} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A\}|\, d\mathbf{P} =$$
$$= \int_{\bigcup \widetilde{B}_i} \sup_{A \in \mathfrak{A}_1} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A\}|\, dP \leqslant \beta.$$

L'inégalité (4.2.2) se trouve ainsi démontrée.

Passons à la démonstration de l'inégalité inverse. Désignons par $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ le sous-ensemble de $\mathfrak{A}_1$ de tous les événements du type $\{\eta_1(u_1), \ldots, \eta_1(u_s)) \in \Lambda\}$, où Λ est la réunion de cubes de dimension $2s$ à sommets rationnels. L'ensemble $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ est dénombrable. On peut supposer que lorsque l'on définit β on prend le suprémum seulement par rapport à $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1$ (le lecteur peut inclure cette condition dans la définition de β). A chaque événement élémentaire $\omega \in \Omega$ correspond l'événement $A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ tel que

$$\mathbf{P}\{A_j \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A_j\} \geqslant \sup_{A \in \mathfrak{A}_1} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A\}| - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Désignons par B_j les événements constitués par tous les ω correspondant à un même A_j. Il est évident que $B_j \in \mathfrak{A}_2$. On peut considérer que tous les événements B_j sont incompatibles (dans le cas contraire on aurait pu envisager les événements $\widetilde{B}_1 = B_1$, $\widetilde{B}_2 = B_2 \setminus B_1$, $\widetilde{B}_3 \setminus (B_2 \cup B_1), \ldots$). Par conséquent sont incompatibles les événements A_jB_j. Donc

$$\beta = \int_{\Omega} \sup_{A \in \mathfrak{A}_1} |\mathbf{P}\{A \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A\}| \, d\mathbf{P} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \int_{B_j} [\mathbf{P}\{A_j \mid \mathfrak{A}_2\} - \mathbf{P}\{A_j\}] \, d\mathbf{P} + \varepsilon =$$

$$= \sum_j [\mathbf{P}\{A_jB_j\} - \mathbf{P}\{A_j\}\mathbf{P}\{B_j\}] + \varepsilon =$$

$$= [Q(\cup A_jB_j) - \widetilde{Q}(\cup A_jB_j)] + \varepsilon \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Var}(Q - \widetilde{Q}) + \varepsilon.$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

L e m m e 3. *Si les ensembles U et V sont finis on a les inégalités*

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\operatorname{Sp} B_1} - \frac{1}{2}\left(2 \operatorname{Sp} B_1 + \frac{1}{2} \frac{3 \operatorname{Sp} B_1 + \frac{1}{2}(\operatorname{Sp} B_1)^2}{(1 - \|B_1\|)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{\operatorname{Sp} B_1} + \frac{1}{2}\left(2 \operatorname{Sp} B_1 + \frac{1}{2} \frac{3 \operatorname{Sp} B_1 + \frac{1}{2}(\operatorname{Sp} B_1)^2}{(1 - \|B_1\|)^2}\right). \tag{4.2.5}$$

Les constantes $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ et $\frac{1}{2\pi}$ précédant $\sqrt{\operatorname{Sp} B_1}$ sont exactes.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du lemme 1 on a $\{\eta_1(u), u \in U\} = \{\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}\}$, $\{\eta_2(v), v \in V\} = \{\eta_{21}, \ldots, \eta_{2n}\}$, les vecteurs $\{\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}\}$, $\{\eta_{21}, \ldots, \eta_{2n}\}$ se composent de variables normales indé-

pendantes de moyenne nulle et de variance égale à 1, de plus

$$M\eta_{1i}\eta_{2i} = \delta_{ij}\rho_i, \quad 1 \geqslant \rho_1 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n > 0$$

et

$$\operatorname{Sp} B_1 = \operatorname{Sp} B_2 = \sum \rho_i^2, \quad \| B_1 \| = \| B_2 \| = \rho_1^2.$$

Comme pour $\rho_1 = 1$ l'affirmation du lemme est triviale, nous poserons $\rho_1 < 1$. Sous les hypothèses faites, en désignant par $p_1(x)$, $p_2(y)$, $p_{12}(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ les densités de probabilité des vecteurs gaussiens $(\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n})$, $(\eta_{21}, \ldots, \eta_{2n})$, $(\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{2n})$ on a

$$\operatorname{Var}[Q - \widetilde{Q}] = \int_{R^n}\int_{R^n} | p_{12}(x, y) - p_1(x) p_2(y) | \, dx \, dy, \tag{4.2.6}$$

$$p_1(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2}, \qquad p_2(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum y_i^2},$$

$$p_{12}(x, y) = (2\pi)^{-n} \prod \frac{1}{\sqrt{1-\rho_i}} \exp\left\{ -\frac{x_i^2 + y_i^2 - 2\rho_i x_i y_i}{2(1-\rho_i^2)} \right\}.$$

Ecrivons le second membre de (4.2.6) sous la forme suivante:

$$\int_{R^n}\int_{R^n} \left| \frac{p_{12}(x, y)}{p_1(x) p_2(y)} - 1 \right| p_1(x) p_2(x) \, dx \, dy = \widetilde{M} | e^{-\zeta} - 1 |,$$

où

$$\zeta = -\ln \frac{p_{12}(\eta_1, \eta_2)}{p_1(\eta_1) p(\eta_2)} = \sum \frac{\rho_i^2\eta_{1i}^2 + \rho_i^2\eta_{2i}^2 - 2\rho_i\eta_{1i}\eta_{2i}}{2(1-\rho_i^2)} + \frac{1}{2}\ln(1-\rho_i^2),$$

et l'espérance mathématique $\widetilde{M}$ se calcule par rapport à la mesure $\widetilde{Q}$, c'est-à-dire en supposant que toutes les $(\eta_{11}, \ldots, \eta_{2n})$ sont indépendantes.

Développons $e^{-\zeta}$ en série de Taylor, en écrivant le terme résiduel dans la forme de Lagrange, soit

$$e^{-\zeta} = 1 - \zeta + \frac{\zeta^2}{2} e^{-\theta\zeta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \widetilde{M} | e^{-\zeta} - 1 | &= \\ &= \int_{\{\zeta \geqslant 0\}} \left| \zeta - \frac{\zeta^2}{2} e^{-\theta\zeta} \right| d\widetilde{Q} + \int_{\{\zeta < 0\}} \left| \zeta - \frac{\zeta^2}{2} e^{-\theta\zeta} \right| d\widetilde{Q} \geqslant \\ &\geqslant \int_{\{\zeta \geqslant 0\}} \left(|\zeta| - \frac{\zeta^2}{2} \right) d\widetilde{Q} + \int_{\{\zeta < 0\}} \left(|\zeta| - \frac{\zeta^2}{2} e^{-\zeta} \right) d\widetilde{Q} \geqslant \\ &\geqslant \widetilde{M} |\zeta| - \frac{1}{2} \widetilde{M}\zeta^2 - \frac{1}{2} \widetilde{M}\zeta^2 e^{-\zeta}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue on démontre l'inégalité

$$\widetilde{\mathbf{M}}\,|e^{-\zeta}-1|\leqslant\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta|-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2e^{-\zeta}. \tag{4.2.7}$$

Remarquant que $\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2e^{-\zeta}=\mathbf{M}\zeta^2$, où $\mathbf{M}$ est l'espérance mathématique par rapport à Q, on a

$$\widetilde{\mathbf{M}}\,|\,\zeta\,|-\frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2+\mathbf{M}\zeta^2)\leqslant 2\beta\leqslant\widetilde{\mathbf{M}}\,|\,\zeta\,|+\frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2+\mathbf{M}\zeta^2). \tag{4.2.8}$$

Introduisons les nouvelles variables aléatoires u_i, v_i telles que

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{1i}-\eta_{2i}),\qquad v_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{1i}+\eta_{2i}).$$

Il est évident que $\widetilde{\mathbf{M}}u_iv_i=\mathbf{M}u_iv_i=0$, donc les variables aléatoires gaussiennes $(u_1,\ldots,u_n,\ v_1,\ldots,v_n)$ sont indépendantes par rapport aux deux distributions $\widetilde{Q}$ et Q. De plus

$$\widetilde{\mathbf{M}}u_i=\widetilde{\mathbf{M}}v_i=0,\quad \widetilde{\mathbf{M}}u_i^2=\widetilde{\mathbf{M}}v_i^2=1,$$
$$\mathbf{M}u_i=\mathbf{M}v_i=0,$$
$$\mathbf{M}u_i^2=\left(1-\frac{\rho_i}{2}\right),\qquad \mathbf{M}v_i^2=\left(1+\frac{\rho_i}{2}\right).$$

Avec les nouvelles variables on a

$$\zeta=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\rho_i(1+\rho_i)\,u_i^2-\rho_i(1-\rho_i)\,v_i^2}{1-\rho_i^2}+\ln(1-\rho_i^2)\right).$$

D'où on obtient facilement

$$\widetilde{\mathbf{M}}\zeta^2=\widetilde{\mathbf{D}}\zeta+(\widetilde{\mathbf{M}}\zeta)^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\left[2\operatorname{Sp}B_1+\frac{2\operatorname{Sp}B_1}{(1-\|B_1\|)^2}+\left(\operatorname{Sp}B_1\frac{\|B_1\|^2}{1-\|B_1\|}\right)^2\right],$$
$$\mathbf{M}\zeta^2\leqslant\frac{1}{4}\left[2\operatorname{Sp}B_1+\frac{2\operatorname{Sp}B_1}{(1-\|B_1\|)^2}+\left(\frac{\operatorname{Sp}B_1}{1-\|B_1\|}\right)^2\right].$$

Il est un peu plus difficile d'obtenir l'estimation de $\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta|$. Nous remplaçons d'abord ζ par une variable aléatoire plus simple

$$\zeta_1=\frac{1}{2}\sum\rho_i\,(u_i^2-v_i^2),$$

en nous servant des inégalités évidentes

$$\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta_1|-\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta-\zeta_1|\leqslant\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta|\leqslant\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta_1|+\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta-\zeta_1|, \tag{4.2.9}$$
$$\widetilde{\mathbf{M}}\,|\zeta-\zeta_1|\leqslant\operatorname{Sp}B_1\left(1-\frac{\|B_1\|^{1/2}}{1-\|B_1\|}\right).$$

Enfin l'estimation de $\widetilde{\mathbf{M}}|\zeta_1|$ est donnée par le lemme suivant:

Lemme 4. *On a les inégalités suivantes:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\operatorname{Sp} B_1} \geqslant \widetilde{\mathbf{M}}|\zeta_1| \geqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\operatorname{Sp} B_1}. \qquad (4.2.10)$$

Démonstration du lemme 4. Nous commençons par calculer la fonction caractéristique $a(\theta)$ de la variable aléatoire ζ_1. La fonction caractéristique de chacune des variables aléatoires u_i^2, v_i^2 étant

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-2i\theta}},$$

alors

$$a(\theta) = \prod_i (1+\rho_i^2\theta^2)^{-1/2}.$$

Puis sur la base de l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha\theta}{\theta}\,d\theta = \pi \operatorname{sign}\alpha$$

on obtient

$$\mathbf{M}|\zeta_1| = \mathbf{M}\zeta_1 \operatorname{sign}\zeta_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\mathbf{M}\left(\zeta_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\zeta_1\theta}-e^{i\zeta_1\theta}}{\theta}\,d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a'(\theta)-a'(-\theta)}{\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod(1+\rho_i^2\theta^2)^{-1/2}\left(\sum_i\frac{\rho_i^2}{1+\rho_i^2\theta^2}\right)d\theta.$$

En désignant $\frac{\rho_i^2}{\operatorname{Sp} B_1}$ par λ_i la dernière égalité devient

$$\widetilde{\mathbf{M}}|\zeta_1| = \frac{\sqrt{\operatorname{Sp} B_1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod(1+\lambda_i\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_i\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i\theta^2}\right)d\theta, \qquad (4.2.11)$$

$$\sum_i \lambda_i = 1.$$

Déterminons les bornes supérieure et inférieure des fonctions

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\prod(1+\lambda_i\theta^2)^{-1/2}\left(\sum_i\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i\theta^2}\right)d\theta$$

dans les simplexes $\Sigma\lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$. La méthode classique de recherche des extrema, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, par

10-0191

exemple, montre après des calculs peu compliqués que la fonction Φ atteint un minimum (maximum) pour des coordonnées égales $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ ou aux sommets du simplexe $\Sigma\lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$. Par conséquent l'intégrale dans (4.2.11) a pour borne supérieure

$$\sup_s \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{\theta^2}{s}\right)^{-\frac{s+2}{2}} d\theta =$$

$$= \sup_s 4\pi \sqrt{s}\, \frac{\Gamma(s-1)}{2^s \left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \sqrt{2\pi}\, \frac{\sqrt{s-2}\,(s-2)^{s-2}\sqrt{s}\, e^2}{s^{s-1}} = \sqrt{2\pi}. \qquad (4.2.12)$$

$\Gamma(s)$ est ici la fonction Γ d'Euler à laquelle nous avons appliqué la formule de Stirling. D'une manière analogue cette intégrale n'est pas inférieure à

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\theta^2)^{-3/2}\, d\theta = 2. \qquad (4.2.13)$$

Les estimations (4.3.12) et (4.2.13), ainsi que l'égalité (4.2.11) permettent d'écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\operatorname{Sp} B_1} \geqslant \tilde{\mathbf{M}}\,|\zeta_1| \geqslant \frac{1}{\pi} \sqrt{\operatorname{Sp} B_1}.$$

La démonstration montre que les deux estimations ne peuvent être améliorées. Le lemme 4, ainsi que le lemme 3 se trouvent ainsi démontrés.

L e m m e 5. *Dans les conditions du lemme* 3 *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{p_{12}(x,y)}{p_1(x)\, p_2(y)} - 1 \right|^2 p_1(x)\, p_2(y)\, dx\, dy = \prod_i (1-\rho_i^2)^{-1} - 1. \qquad (4.2.14)$$

Le lemme se démontre par le calcul direct du premier membre de (4.2.14).

Abordons maintenant la démonstration du théorème 4. Soit Q_τ la mesure engendrée par notre processus aléatoire $\xi(t)$ sur la réunion des σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$ et $\mathfrak{A}(0, \infty)$; désignons par $\tilde{Q}_\tau$ la mesure coïncidant avec Q sur $\mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$ et $\mathfrak{A}(0, \infty)$ et telle que les σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$, $\mathfrak{A}(0, \infty)$ soient indépendantes par rapport à $\tilde{Q}_\tau$. En vertu du lemme 2 on a

$$\beta(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Var}(Q_\tau - \tilde{Q}_\tau). \qquad (4.2.15)$$

Supposons que le processus $\xi(t)$ soit absolument régulier, c'est-à-dire que $\lim_{\tau\to\infty} \beta(\tau) = 0$. (4.2.15) permet d'affirmer qu'il existe

toujours un nombre τ_0 tel que pour $\tau \geqslant \tau_0$ quelconque on ait

$$\frac{1}{2} \operatorname{Var} (Q_\tau - \widetilde{Q}_\tau) = \beta (\tau) < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent pour $\tau \geqslant \tau_0$ les mesures Q_τ et $\widetilde{Q}_\tau$ ne sont pas singulières; étant gaussiennes, elles sont conformément aux résultats du § 2 du chapitre III absolument continues l'une par rapport à l'autre.

Choisissons dans l'espace $H(-\infty, -\tau)$ une base quelconque $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots$, et dans l'espace $H(0, \infty)$ une base $\eta_{21}, \eta_{22}, \ldots$ Considérons le vecteur $(\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{2n})$; les mesures Q, $\widetilde{Q}$ engendrées par ce vecteur, l'opérateur B_1 et les nombres propres de l'opérateur B_1 seront dotés de l'indice n, c'est-à-dire que nous écrirons respectivement Q_n, $\widetilde{Q}_n$, B_{1n}, ρ^2_{in}. Posons $p_n = \frac{dQ_n}{d\widetilde{Q}_n}$. Il est facile de calculer que

$$\mathbf{M} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum \ln (1 - \rho^2_{in}). \tag{4.2.16}$$

La continuité absolue des mesures Q_τ, $\widetilde{Q}_\tau$ entraîne que, comme il a été montré au § 2 du chapitre III,

$$\sup_n |\mathbf{M} \ln p_n| < \infty. \tag{4.2.17}$$

D'où, compte tenu de (4.2.16), on obtient l'inégalité

$$\sup_n \operatorname{Sp} B_{1n} < \infty.$$

Pour $n \to \infty$ les opérateurs B_{1n} convergent faiblement vers l'opérateur B_τ, c'est-à-dire que l'on a $\lim\limits_n (B_{1n}\eta, \eta) = (B_\tau \eta, \eta)$ (les opérateurs B_{1n} sont de toute évidence définis partout dans $H(-\infty, \infty)$). Par conséquent l'opérateur B_τ a une trace finie.

Supposons ensuite que q_τ soit la densité de Q_τ par rapport à $\widetilde{Q}_\tau$. En vertu des résultats du chapitre III (page 92) on a pour $\tau > \tau_0$

$$q_\tau = \widetilde{\mathbf{M}} (q_{\tau_0} \mid \mathfrak{A}_\tau),$$

où $\mathfrak{A}_\tau$ est la réunion des σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$, $\mathfrak{A}(0, \infty)$. D'après (4.2.14) on a

$$\widetilde{\mathbf{M}} |q_\tau - 1|^2 < \infty.$$

En vertu des théorèmes bien connus de la théorie des espérances mathématiques conditionnelles, les variables aléatoires q_τ convergent en moyenne quadratique vers q_∞ pour $\tau \to \infty$. Le processus absolument régulier $\xi(t)$ est régulier, c'est-à-dire que l'intersection $\bigcap\limits_\tau \mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$ est triviale, par conséquent, on a forcément $q_\infty = 1$.

En effet, la variable aléatoire $q_\infty = \widetilde{\mathrm{M}}\,(q_{\tau_0} \mid \mathfrak{A}_\infty)$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}\,(0, \infty)$ et pour tous les $A \in \mathfrak{A}_\infty$ par définition de l'espérance mathématique conditionnelle on a

$$\int_A q_\infty\, d\widetilde{Q} = \int_A q_{\tau_0}\, d\widetilde{Q} = \int_A dQ = Q(A) = \widetilde{Q}(A) = \int_A 1 \cdot d\widetilde{Q}.$$

Ces égalités signifient que $q_\infty = 1$ avec une probabilité égale à 1.

En vertu de (4.2.14) on a

$$\operatorname{Sp} B_\tau \leqslant \widetilde{\mathrm{M}}\,|\,q_\tau - 1\,|^2 = \widetilde{\mathrm{M}}\,|\,q_\tau - q_\infty\,|^2 \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0,$$

et le lemme 3 permet de trouver les relations limites (4.2.1).

Inversement, pour un τ_0 quelconque l'opérateur B_{τ_0} est un opérateur complètement continu de trace finie. Le processus $\xi\,(t)$ est alors complètement régulier (voir la remarque au théorème 3) et $\|\,B_\tau\,\| \to 0$. Nous allons supposer que l'on a déjà $\|\,B_{\tau_0}\,\| < 1$. Il est également évident qu'avec B_{τ_0} tous les opérateurs B_τ, $\tau > \tau_0$, ont une trace finie et

$$\operatorname{Sp} B_\tau \leqslant \operatorname{Sp} B_{\tau_0}.$$

Choisissons maintenant, en utilisant la continuité complète des opérateurs B_τ, les bases $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{21}, \eta_{22}, \ldots$ comme mentionné dans le lemme 1. En vertu de (4.2.16) on a

$$\sup_n |\,\widetilde{\mathrm{M}} \ln p_n\,| \leqslant \operatorname{Sp} B_\tau \left(1 + \frac{\|\,B_\tau\,\|}{1 - \|\,B_\tau\,\|}\right).$$

Revenant de nouveau au § 2 du chapitre III on voit que les mesures Q_τ et $\widetilde{Q}_\tau$ sont absolument continues. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné, le processus $\xi\,(t)$ est complètement régulier et a fortiori il est régulier. Comme nous l'avons déjà montré dans ces cas

$$\widetilde{\mathrm{M}}\,|\,q_\tau - 1\,|^2 \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$$

et donc, vu (4.2.14), on a $\operatorname{Sp} B_\tau \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$. La référence au lemme 3 démontre maintenant le théorème.

R e m a r q u e. Dans le cas des processus à temps discret le théorème s'énonce plus simplement, à savoir :

Pour qu'un processus gaussien stationnaire $\xi\,(t)$ *à temps discret soit absolument régulier il faut et il suffit que l'opérateur* B_1 *soit un opérateur complètement continu à trace finie.*

En effet, comme mentionné lors de la démonstration du théorème 3, pour des processus à temps discret les opérateurs B_τ ne diffèrent de l'opérateur B_1 que par un opérateur de dimension finie.

T h é o r è m e 5. *Le processus gaussien stationnaire* $\xi\,(t)$ *satisfait à la condition de régularité* (4.1.5) *si et seulement si* $B_\tau = 0$ *pour tous les* $\tau > \tau_0$.

Dans [14] on peut trouver la démonstration de ce théorème simple. Notons seulement que l'égalité $B_\tau = 0$ signifie que les espaces $H(-\infty, -\tau)$ et $H(0, \infty)$ sont orthogonaux ce qui entraîne que les σ-algèbres $\mathfrak{A}(-\infty, -\tau)$ et $\mathfrak{A}(0, \infty)$ sont indépendantes.

Enfin nous montrerons dans le paragraphe suivant que les conditions de régularité absolue et de régularité informationnelle coïncident.

§ 3. Condition de régularité informationnelle

Théorème 6. *Pour qu'un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ soit informationnellement régulier il faut et il suffit que pour un τ_0 quelconque l'opérateur B_{τ_0} soit complètement continu à trace finie. Tous les opérateurs B_τ, $\tau > \tau_0$, ont alors une trace finie et le coefficient de régularité informationnelle est*

$$I(\tau) = -\frac{1}{2} \sum \ln(1 - \rho_i^2) \sim \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B_\tau, \tag{4.3.1}$$

où ρ_i^2 est le i-ième nombre propre de l'opérateur B_τ.

Nous allons déduire ce théorème du résultat général suivant. Soit $\{\xi(u),\ u \in U;\ \eta(v),\ v \in V\}$ un système quelconque de variables aléatoires gaussiennes. Soit

$$I_{\xi\eta} = I\{\xi(u),\ u \in U;\ \eta(v),\ v \in V\}$$

la quantité d'information que contiennent $\{\xi(u),\ u \in U\}$ sur $\{\eta(v),\ v \in V\}$. Soient enfin comme habituellement H_1, H_2 des enveloppes linéaires fermées respectivement de $\{\xi(u),\ u \in U\}$ et de $\{\eta(v),\ v \in V\}$; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ les σ-algèbres engendrées par les variables $\{\xi(u),\ u \in U\}$, $\{\eta(v),\ v \in V\}$ et B_1, B_2 des opérateurs auto-adjoints non négatifs, définis sur les espaces H_1, H_2 comme mentionné ci-dessus. On a alors le théorème suivant *).

Théorème 7. *La quantité d'information $I_{\xi\eta}$ est finie si et seulement si l'opérateur B_1 (donc également B_2) est un opérateur complètement continu à trace finie, et $\| B_1 \| < 1$. Dans ce cas*

$$I_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} \sum_i \ln(1 - \rho_i^2), \tag{4.3.2}$$

où $\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2 \geqslant \ldots$ sont tous les nombres propres de l'opérateur B_1.

Démonstration du théorème 7. 1. Nous allons tout d'abord calculer la quantité d'information contenue dans la

---

*) I. Guelfand, A. Iaglom. *Sur le calcul de la quantité d'information sur une fonction aléatoire contenue dans une autre fonction du même type* (en russe). Uspekhi math. nauk **XII**, rec. 1 (1957).

variable gaussienne ξ sur l'autre variable η, liée à celle-ci d'une manière gaussienne. On peut évidemment écrire

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\eta = 0, \quad \mathbf{M}\xi^2 = \mathbf{M}\eta^2 = 1.$$

Soit de plus $\mathbf{M}\xi\eta = \rho$ de telle sorte que la densité mutuelle des variables envisagées est

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

On a

$$I_{\xi\eta} = \sup_{A_i, B_j} \sum \ln \frac{\mathbf{P}\{A_i B_j\}}{\mathbf{P}\{A_i\}\mathbf{P}\{B_j\}} \mathbf{P}\{A_i B_j\}, \tag{4.3.3}$$

où le suprémum est pris sur les événements du type $A_i = \{\xi \in E_i\}$, $B_j = \{\eta \in E'_j\}$, E_i, E'_j étant des ensembles boréliens linéaires. Par conséquent

$$I_{\xi\eta} = \sup_{E_i, E'_j} \sum \ln \frac{Q_{12}\{E_i \times E'_j\}}{Q_1\{E_i\} Q_2(E'_j)} Q_{12}(E_i \times E'_j), \tag{4.3.4}$$

où Q_{12}, Q_1, Q_2 sont des mesures sur le plan et sur la droite, induites respectivement par les distributions des variables aléatoires (ξ, η), ξ et η:

$$Q_{12}(E \times F) = \mathbf{P}\{\xi \in E, \eta \in F\},$$
$$Q_1(E) = \mathbf{P}\{\xi \in E\}, \quad Q_2(F) = \mathbf{P}\{\eta \in F\}.$$

Supposons tout d'abord que $\rho < 1$. La mesure Q_{12} est alors absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, les mesures Q_{12}, $Q_1 \times Q_2$ sont mutuellement absolument continues avec la densité

$$\frac{Q_{12}(dx\,dy)}{Q_1(dx)\,Q_2(dy)} = \frac{p(x, y)}{p(x)\,p(y)},$$

où $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est la densité de probabilité des variables ξ, η. La somme dans (4.3.4) est donc une somme intégrale pour l'intégrale de Lebesgue de la fonction $\ln \frac{p(x, y)}{p(x)\,p(y)}\, p(x, y)$. Par conséquent

$$I_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{p(x, y)}{p(x)\,p(y)}\, p(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \mathbf{M} \ln \frac{p(\xi, \eta)}{p(\xi)\,p(\eta)} = -\frac{1}{2}\ln(1-\rho^2). \tag{4.3.5}$$

Si $\rho = 1$, on a $I_{\xi\eta} = \infty$. Pour s'en convaincre il suffit de poser dans (4.3.3) $A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n$ avec des probabilités égales

à $\mathbf{P}\{A_i\} = \frac{1}{n}$. Pour tous les n on a

$$I_{\xi\eta} > \ln n.$$

Comme pour $\rho = 1$ le second membre de (4.3.5) devient infini, on peut considérer la formule (4.3.5) également vraie dans ce cas.

2. Supposons maintenant que les ensembles U, V soient finis. La quantité d'information $I_{\xi\eta}$ est invariante par rapport aux transformations non singulières des espaces H_1, H_2. Ceci découle immédiatement de la définition de la quantité d'information (4.1.6) et du fait évident que les σ-algèbres $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ sont invariantes par rapport aux transformations mentionnées. Pour cette raison et en vertu du lemme 1, on peut considérer dès le début que

$$\{\xi(u),\ u \in U\} = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \{\eta(v),\ v \in V\} = (\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

où tous les couples (ξ_i, η_i) sont indépendants et

$$\mathbf{M}\xi_i = \mathbf{M}\eta_i = 0, \quad \mathbf{D}\xi_i = \mathbf{D}\eta_i = 1, \quad \mathbf{M}\xi_i\eta_i = \rho_i.$$

Dans (4.1.6) il suffit de prendre le suprémum sur les événements A_i, B_j répondant aux conditions suivantes:

$$A_i = \{\xi_1 \in E_{i1}, \ldots, \xi_n \in E_{in}\}, \quad B_j = \{\eta_1 \in E'_{j1}, \ldots, \eta_n \in E'_{jn}\}.$$

L'indépendance des couples (ξ_i, η_i) permet d'écrire alors

$$I_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n} I_{\xi_i\eta_i}$$

et par conséquent en vertu de (4.3.5)

$$I_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln(1-\rho_i^2)$$

avec $I_{\xi\eta} < \infty$ dans le cas et seulement dans le cas où $\rho_1 = \sqrt{\| B_1 \|} < 1$.

3. Passons au cas général. Au point 1 de la démonstration nous avons déjà signalé que si $\| B_1 \| = 1$, on a $I_{\xi\eta} = \infty$. Il suffit donc d'étudier le cas $\| B_1 \| < \infty$.

Supposons que B_1 ne soit pas un opérateur à trace finie. Prenons n variables aléatoires quelconques $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de la famille $\{\xi(u),\ u \in U\}$ et n variables aléatoires $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de la famille $\{\eta(v),\ v \in V\}$. Désignons par $B_1^{(n)}$ l'opérateur correspondant à ce choix de variables aléatoires. Bien entendu, les opérateurs $B_1^{(n)}$ peuvent être envisagés sur tout l'espace H_{12} tendu sur $\{\xi(u), \eta(v)\}$. Désignons par $\lambda_1^{(n)} \geqslant \lambda_1^{(n)} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n^{(n)}$ les nombres propres de l'opérateur $B_1^{(n)}$ (qui est fini). Il est clair que $\lambda_1^{(n)} = \| B_1^{(n)} \| \leqslant \| B_1 \| < 1$.

Les variables aléatoires $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ peuvent être choisies de telle sorte que les opérateurs $B_1^{(n)}$ convergent faiblement vers B_1. On a alors

$$\lim_n \operatorname{Sp} B_1^{(n)} = \lim_n \sum_i \lambda_i^{(n)} = \infty.$$

Par définition de la quantité d'information (4.1.6)

$$I_{\xi\eta} \geqslant I((\xi_1, \ldots, \xi_n), \ (\eta_1, \ldots, \eta_n)).$$

Mais comme nous l'avons déjà montré au point 2

$$I((\xi_1, \ldots, \xi_n), \ (\eta_1, \ldots, \eta_n)) = -\frac{1}{2} \sum_i \ln(1-\lambda_i^{(n)}) -$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_i (\lambda_i^{(n)})^k \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B_1^{(n)},$$

par conséquent, si $\operatorname{Sp} B_1 = \infty$, on a également $I_{\xi\eta} = \infty$.

Supposons maintenant que B_1 soit un opérateur complètement continu à trace finie. En nous basant sur le lemme 1 prenons dans les espaces H_1, H_2 les bases $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ composées des éléments propres des opérateurs B_1, B_2. Dans ce cas $\mathbf{M}\xi_i\eta_i = \rho_i$, où ρ_i^2 sont les nombres propres des opérateurs B_1, B_2.

En choisissant n suffisamment grand, on peut approcher aussi bien que l'on veut des événements $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$ quelconques par des événements mesurables par rapport aux variables aléatoires $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. En nous référant de nouveau à la définition de la quantité d'information (4.1.6) nous trouvons que

$$I_{\xi\eta} = \lim_{n\to\infty} I(\xi_1, \ldots, \xi_n ; \ \eta_1, \ldots, \eta_n),$$

où

$$I(\xi_1, \ldots, \xi_n ; \ \eta_1, \ldots, \eta_n) = -\frac{1}{2} \sum_1^n \ln(1-\rho_i^2).$$

Le théorème 7 se trouve ainsi démontré.

Ce théorème a pour conséquence immédiate qu'un processus aléatoire $\xi(t)$ est informationnellement régulier si et seulement si les opérateurs B_τ ont une trace finie pour $\tau > \tau_0$ et que l'égalité (4.3.1) est vraie. Au cours de la démonstration du théorème 4 nous avons établi que $\lim_\tau \operatorname{Sp} B_\tau = 0$ si seulement $\operatorname{Sp} B_{\tau_0} < \infty$ pour τ_0 quelconque. Le théorème 6 se trouve aussi démontré.

En comparant les théorèmes 4 et 6 on voit que les conditions de régularité absolue et informationnelle sont équivalentes et que par exemple pour $I(\tau) \to 0$ on a

$$\frac{1}{\pi^2} \leqslant \underline{\lim} \frac{\beta^2(\tau)}{I(\tau)} \leqslant \overline{\lim} \frac{\beta^2(\tau)}{I(\tau)} \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Remarque. Compte tenu de la remarque au théorème 4 on peut affirmer que *pour qu'un processus gaussien stationnaire* $\xi(t)$ *à temps discret soit informationnellement régulier, il faut et il suffit que l'opérateur* B_1 *ait une trace finie.*

§ 4. Condition de régularité absolue. Processus à temps discret

Dans ce paragraphe et dans le suivant nous allons donner une description complète des processus gaussiens stationnaires absolument réguliers (des processus satisfaisant à la condition (4.1.3)). Ensemble avec les résultats du § 3 ceci nous donnera également la description des processus informationnellement réguliers.

Théorème 8 *). *Pour qu'un processus gaussien stationnaire* $\xi(t)$ *à temps discret* $t = 0, \pm 1, \ldots$ *soit absolument régulier (donc également informationnellement régulier) il faut et il suffit que sa densité spectrale* $f(\lambda)$ *admette la représentation*

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 a(\lambda), \tag{4.4.1}$$

où $P(z)$ *est un polynôme à racines sur la circonférence* $|z| = 1$ *et les coefficients* a_j *de la série de Fourier* $\sum a_j e^{i\lambda j}$ *de la fonction* $\ln a(\lambda)$ *sont tels que*

$$\sum |j| |a_j|^2 < \infty. \tag{4.4.2}$$

La démonstration est basée sur le théorème 4, plus exactement sur la remarque à ce théorème. Bien entendu, la formulation analytique du théorème 8 exige qu'on passe de l'espace $H(-\infty, \infty)$ à l'espace isométrique des fonctions $L(F)$. Pour ne pas introduire de désignations supplémentaires, nous désignerons également par $B_\tau^\pm$ les opérateurs dans $L(F)$ analogues aux opérateurs $B_\tau^\pm$.

Tout processus absolument régulier est régulier et par conséquent (voir § 2, chapitre II) sa densité spectrale $f(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2, \tag{4.4.3}$$

où $g(z)$ est la fonction extérieure de la classe de Hardy $\mathscr{H}^2$ dans le cercle.

Introduisons la fonction $c(\lambda) = \dfrac{\overline{g(e^{i\lambda})}}{g(e^{i\lambda})}$ et désignons par $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\lambda}$ sa série de Fourier.

*) I. Ibrahimov, V. Solev, *Sur une condition de régularité des processus gaussiens stationnaires* (en russe). Doklady Akademii Nauk SSSR, 185, n° 3, 509-512.

L e m m e 6. *Pour que le processus* $\xi(t)$ *soit absolument régulier il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{-\infty}^{0} |j|\,|c_j|^2 \tag{4.4.4}$$

soit convergente.

Compte tenu de la remarque au théorème 4 (page 148), il faut montrer que la convergence de la série (4.4.4) est équivalente à ce que l'opérateur B_1 soit nucléaire. Il nous sera plus commode d'avoir affaire à l'opérateur $B_1^+ = \mathcal{P}_0^+\mathcal{P}_1^-\mathcal{P}_0^+$ unitairement équivalent à B_1^+, $\mathcal{P}_\tau^+$ étant cette fois le projecteur dans $L(F)$ sur $L_{(\tau,\infty)}(F)$ et $\mathcal{P}_\tau^-$ le projecteur dans $L(F)$ sur $L_{(-\infty,-\tau)}(F)$. Il suffit de considérer B_1^+ comme un opérateur de $L_{(0,\infty)}(F) = L^+(F)$ dans $L^+(F)$. On sait *) que pour que l'opérateur B_1^+ soit nucléaire (donc ait une trace finie) il faut et il suffit que pour une base orthonormée quelconque $\{e_j\}$ dans $L^+(F)$ la série $\sum_j (B_1^+e_j,\ e_j)_F$ soit convergente. Si cette série est convergente pour une base orthonormée quelconque, elle converge également pour toute base de ce type, et sa somme est justement égale à la trace de l'opérateur B_1^+.

Prenons pour base orthonormée dans $L^+(F)$ les fonctions $e_k(\lambda) = e^{i\lambda k}g^{-1}(e^{i\lambda})$, $k = 0, 1, \ldots$ Il est évident que le système $\{e_k\}$ est orthonormé ; nous allons montrer que ce système est une base.

En effet, dans le § 2 du chapitre II nous avons montré que tout élément $\varphi \in L^+(F)$ peut s'écrire comme φ_1/g, où $\varphi_1 \in \mathcal{H}^2$. Si $\Sigma\, c_k e_h$ est une combinaison linéaire quelconque des éléments e_k on a **).

$$\|\varphi - \sum c_k e_k\|_F = \|\varphi_1 - \sum c_k e^{i\lambda k}\|^{(2)}.$$

Les combinaisons linéaires $\Sigma\, c_k e^{i\lambda k}$ étant denses dans $\mathcal{H}^2$, la dernière égalité signifie que les combinaisons linéaires $\Sigma\, c_k e_k$ sont denses dans $L^+(F)$, c'est-à-dire que $\{e_k\}$ est une base dans $L^+(F)$.

D'une manière analogue au lemme 2 du chapitre II on peut démontrer les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}_\tau^+ = g^{-1}\Pi_\tau^+ g, \quad \mathcal{P}_\tau^- = \bar{g}^{-1}\,\Pi_\tau^-\,\bar{g},$$

où $\Pi_\tau^+(\Pi_\tau^-)$ sont les projecteurs dans $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ sur $e^{i\lambda\tau}\mathcal{H}^2$ (sur

---

*) Voir, par exemple, [5], page 55; rappelons que tous les opérateurs B_τ^+ sont positifs.

**) Rappelons que la notation $\|\varphi\|^{(p)}$ désigne un norme dans l'espace $\mathcal{L}^p(-\pi, \pi)$.

$e^{-i\lambda\tau}\mathscr{H}^{2-}$). Donc

$$\operatorname{Sp} B_1^+ = \sum_{k=0}^{\infty} (B_1^+ e_k,\ e_k)_F = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathscr{F}_0^+ \mathscr{F}_1^- \mathscr{F}_0^+ e_k,\ e_k)_F =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathscr{F}_1^- e_k,\ e_k)_F = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Pi_1^- \frac{\bar g}{g} e^{i\lambda k},\ \frac{\bar g}{g} e^{i\lambda k} \right)^{(2)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left\| \Pi_1^- \frac{\bar g}{g} e^{i\lambda k} \right\|^{(2)} \right)^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{-1} c_{j-k} e^{i\lambda j} \right|^2 d\lambda =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{0} |j|\,|c_j|^2. \qquad (4.4.5)$$

Le lemme se trouve démontré.

Il nous reste à démontrer que les conditions du théorème 8 sont équivalentes à celles du lemme 6.

Nous allons vérifier que si sont vérifiées les conditions du théorème 8, celles du lemme 6 le sont aussi. En vertu de (4.4.2) on a $\ln a \in \mathscr{L}^2(-\pi, \pi)$ et à plus forte raison $\ln a \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$. Donc la fonction $a(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme $a(\lambda) = |g_1(e^{i\lambda})|^2$, où g_1 est une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^2$. Par conséquent on a également $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$, où la fonction extérieure $g(z) = P(z)\, g_1(z)$.

Si $e^{i\lambda_1}, \ldots, e^{i\lambda_\nu}$ sont les zéros du polynôme $P(z)$, on a de toute évidence

$$\frac{\overline{P(e^{i\lambda})}}{P(e^{i\lambda})} = e^{i\alpha} \prod_{s=1}^{\nu} \frac{e^{-i\lambda} - e^{-i\lambda_s}}{e^{i\lambda} - e^{i\lambda_s}} = e^{i\alpha} e^{-i\nu\lambda} (-1)^\nu,$$

où α est un nombre réel. Donc il suffit d'étudier la fonction $c_1(\lambda) = \dfrac{\overline{g_1(e^{i\lambda})}}{g_1(e^{i\lambda})} = \sum c_{1j} e^{i\lambda j}$ et de montrer que la série $\sum_{j<0} |j|\,|c_{1j}|^2$ est convergente. Qui plus est, nous montrerons la convergence de la série $\sum_j |j|\,|c_{1j}|^2$. Nous aurons besoin du lemme suivant:

L e m m e 7. *Soit la fonction* $h(\lambda) \sim \sum h_j e^{i\lambda j}$ *appartenant à* $\mathscr{L}^2(-\pi, \pi)$. *Désignons par* $\omega(\delta; h)$ *le module de continuité de la fonction* h *dans la métrique* $\mathscr{L}^2$, *c'est-à-dire*

$$\omega(\delta;\ h) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\lambda+\theta) - h(\lambda)|^2\, d\lambda \right)^{1/2}.$$

Les inégalités

$$\sum_{1}^{\infty} \omega^2\left(\frac{1}{n}\,;\,h\right) < \infty \tag{4.4.6}$$

et

$$\sum |j|\,|a_j|^2 < \infty \tag{4.4.7}$$

sont alors équivalentes.

En effet

$$\sum_n \omega^2\left(\frac{1}{n}\,;\,h\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\delta\leqslant\frac{1}{n}} 4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j|^2 \sin^2\frac{j\delta}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{|j|\leqslant n} |h_j|^2 j^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|j|>n} |h_j|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j|^2 j^2 \sum_{n>|j|} \frac{1}{n^2} +$$

$$+ 4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|\,|h_j|^2 \leqslant 5 \sum_j |j|\,|h_j|^2.$$

Inversement, si $|x| < 1$ on a $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$, donc

$$\sum_n \omega^2\left(\frac{1}{n}\,;\,h\right) \geqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|j|\leqslant n} |h_j|^2 \sin^2\frac{j}{2n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{|j|\leqslant n} |h_j|^2 j^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j|^2 j^2 \sum_{n>|j|} \frac{1}{n^2} > \frac{1}{4} \sum |j|\,|h_j|^2.$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Revenant à la démonstration du théorème remarquons que $g_1 = \exp\left\{\frac{1}{2}(\ln a + i\,\widetilde{\ln}\,a)\right\}$ et que par conséquent $\overline{g}_1/g_1 = \exp\{-i\,\widetilde{\ln}\,a\}$, où $\widetilde{h}$ désigne une fonction harmoniquement conjuguée de h. Les valeurs absolues des modules des coefficients de

Fourier des fonctions $\ln a$ et $\widetilde{\ln}\, a$ coïncident, donc $\omega(\delta;\ \ln a) = \omega(\delta;\ \widetilde{\ln}\, a)$. Ensuite

$$\begin{aligned}|\exp\{-i\,\widetilde{\ln}\, a(\lambda+\delta)\}-\exp\{-i\,\widetilde{\ln}\, a(\lambda)\}| &= \\ =|\exp\{-i\,(\widetilde{\ln}\, a(\lambda+\delta)-\widetilde{\ln}\, a(\lambda))\}-1| &\leqslant \\ \leqslant |\widetilde{\ln}\, a(\lambda+\delta)-\widetilde{\ln}\, a(\lambda)|&.\end{aligned}$$

Donc on a également

$$\omega\left(\delta;\ \frac{\bar g_1}{g_1}\right)\leqslant\omega(\delta;\ \widetilde{\ln}\, a)=\omega(\delta;\ \ln a).$$

En revenant au lemme 7 on voit que la convergence de la série $\Sigma\ |j|\,|a_j|^2$ entraîne celle de la série $\sum\limits_j |j|\,|c_{1j}|^2$. Nous avons ainsi démontré que les conditions (4.4.1), (4.4.2) du théorème 8 sont suffisantes pour la régularité absolue du processus gaussien $\xi(t)$.

Le fait que ces conditions sont nécessaires est plus difficile à montrer.

Supposons que le processus $\xi(t)$ soit absolument régulier. Il est alors régulier, sa densité spectrale étant $f(\lambda)$ et $\ln f \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$. Introduisons la notion de coefficient de régularité (totale):

$$\rho(\tau;\ f)=\sup_{\varphi,\,\psi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{i\lambda})\,\overline{\psi(e^{i\lambda})}\,f(\lambda)\,d\lambda\right|=\sup|(\varphi,\ \psi)_F|,$$

où le suprémum est pris sur tous les φ, ψ appartenant respectivement aux sphères unitaires des espaces $L_{(0,\,\infty)}(F)$, $L_{(-\infty,\,-\tau)}(F)$.

Dans le paragraphe 1 nous avons déjà noté que tout processus gaussien absolument régulier satisfait à la condition de mélange intense et est donc complètement régulier, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\tau\to\infty}\rho(\tau) = 0$. En particulier, on peut trouver un k tel que $\rho(k) < 1$. En vertu du théorème 4 du chapitre V la densité spectrale $f(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2\,a(\lambda),$$

où $P(z)$ est un polynôme à racines sur $|z| = 1$, et la fonction $a = e^{u+\tilde v}$, $\|u\|^{(\infty)} < \infty$, $\|v\|^{(\infty)} < \pi/2$. En vertu du théorème cité les coefficients de régularité $\rho(\tau;\ a)$ et $\rho\left(\tau;\ \frac{1}{a}\right)$ construits d'après les densités spectrales a et $\frac{1}{a}$ sont tels que

$$\rho(1;\ a) < 1,\quad \rho\left(1;\ \frac{1}{a}\right) = \rho < 1. \tag{4.4.8}$$

Il est évident que la fonction $a(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme $|g_1(e^{i\lambda})|^2$, où g_1 est une fonction extérieure de $\mathcal{H}^2$. Si tout comme dans la démonstration de la suffisance on pose

$$c_1(\lambda) = \frac{\overline{g_1(e^{i\lambda})}}{g_1(e^{i\lambda})} = \sum_j c_{1j} e^{i\lambda j},$$

à partir du lemme 6 et de l'égalité $\frac{\overline{P(e^{i\lambda})}}{P(e^{i\lambda})} = e^{i\alpha} e^{-i\nu\lambda}(-1)^\nu$ on peut démontrer la convergence de la série $\sum_{-\infty}^{\infty} |j| |c_{1j}|^2$. Si cette série est convergente on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \inf_{A \in H^2} (\| c_1(\lambda) - e^{-in\lambda} A(\lambda) \|^{(2)})^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{-\infty}^{-(n+1)} |c_{1j}|^2 = \sum_{-\infty}^{0} |j| |c_{1j}|^2 < \infty. \tag{4.4.9}$$

Soit une suite de polynômes $A_n(z)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\| c_1(\lambda) - e^{-in\lambda} A_n(e^{i\lambda}) \|^{(2)})^2 < \infty, \tag{4.4.10}$$

posons $e^{-in\lambda} g_1 A_n = Q_n(e^{-i\lambda}) + B_n$, où $Q_n(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à n, et $B_n \in \mathcal{H}^2$. En vertu de (4.4.8)

$$(\| c_1(\lambda) - e^{-in\lambda} A_n(\lambda) \|^{(2)})^2 =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{(g_1(e^{i\lambda})} - Q_n(e^{-i\lambda})) - B_n(e^{i\lambda})|^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} \geqslant$$
$$\geqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{g_1(e^{i\lambda})} - Q_n(e^{-i\lambda})|^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} + \int_{-\pi}^{\pi} |B_n(e^{i\lambda})|^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} -$$
$$-2 \left| \int_{-\pi}^{\pi} \overline{(g_1(e^{i\lambda})} - Q_n(e^{-i\lambda}))\, \overline{B_n(e^{i\lambda})} \frac{d\lambda}{a(\lambda)} \right| \geqslant$$
$$\geqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g_1(e^{i\lambda}) - Q_n(e^{-i\lambda})|^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} + \int_{-\pi}^{\pi} |B_n(e^{i\lambda})|^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} -$$

$$-2\rho\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{g_1(e^{i\lambda})}-Q_n(e^{-i\lambda})|^2\frac{d\lambda}{a(\lambda)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi}^{\pi}|B_n(e^{i\lambda})|^2\frac{d\lambda}{a(\lambda)}\right)^{1/2}\geqslant(1-\rho)\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{g_1(e^{i\lambda})}-Q_n(e^{-i\lambda})|^2\,d\lambda.$$

Donc en même temps que la série (4.4.10) converge la série suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\inf_{P_n}\int_{-\pi}^{\pi}|g_1(e^{i\lambda})-P_n(e^{i\lambda})|^2\frac{d\lambda}{a(\lambda)},\qquad(4.4.11)$$

où l'infimum est pris sur tous les polynômes $P_n(e^{i\lambda})$ de degré non supérieur à n.

Le problème se réduit alors à l'étude des propriétés des meilleures approximations de la fonction $g_1(\lambda)$ par des polynômes dans la métrique de l'espace $\mathscr{L}^2$ de poids $1/a$. A cet effet il est naturel d'introduire les polynômes $\varphi_\nu(z; 1/a)=\varphi_\nu(z)$, $\nu=0, 1, \ldots$, orthogonaux, de poids $1/a$. Pour faciliter l'assimilation du matériel nous avons donné la forme de lemmes à certaines propriétés de ces polynômes. On peut trouver la démonstration de ces lemmes dans de nombreux ouvrages sur les polynômes orthogonaux; dans ce qui suit nous nous référerons à l'ouvrage de U. Grenander et G. Szegö [11], le plus utile à notre avis pour les spécialistes en théorie des probabilités.

Soit $w(\lambda)$ une fonction sommable non négative sur $[-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\ln w\in\mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$, donc $w(\lambda)=|\gamma(e^{i\lambda})|^2$, où $\gamma(z)$ est une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^2$. On appelle polynômes orthogonaux de poids w les polynômes $\varphi_0(z; w)$, $\varphi_1(z; w)$, ..., $\varphi_\nu(z; w)$, ... satisfaisant aux conditions:

a) φ_ν est un polynôme de degré ν ayant devant le terme de degré supérieur un coefficient positif;

b) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}\varphi_\nu(z; w)\overline{\varphi_\mu(z; w)}\,w(\lambda)\,d\lambda=\delta_{\nu\mu},\quad z=e^{i\lambda}.$$

Posons de plus $\varphi_\nu^*(z; w)=z^n\overline{\varphi}_\nu(z^{-1})$. Les polynômes φ_ν, φ_ν^* sont liés entre eux par les relations suivantes (voir [11], page 58):

$$\begin{aligned}k_nz\varphi_n(z)&=k_{n+1}\varphi_{n+1}(z)-l_{n+1}\varphi_{n+1}^*(z),\\ k_n\varphi_{n+1}(z)&=k_{n+1}z\varphi_n(z)+l_{n+1}\varphi_n^*(z),\end{aligned}\qquad(4.4.12)$$

où k_n désigne le coefficient de z^n et l_n, le terme constant du polynôme φ_n.

Désignons par c_ν le ν-ième coefficient de Fourier de la fonction w et posons

$$D_n(w) = \det \| c_{\nu-\mu} \|, \qquad \nu, \mu = 0, 1, \ldots, n.$$

Les déterminants $D_n(w)$ sont appelés déterminants de Toeplitz correspondant au poids w. On a les égalités suivantes ([11], page 54) :

$$k_n(w) = \left(\frac{D_{n-1}(w)}{D_n(w)} \right)^{1/2}, \qquad n = 1, \ldots \tag{4.4.13}$$

Définissons ensuite la moyenne géométrique $G(w)$ de la fonction w par l'égalité

$$G(w) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln w(\lambda)\, d\lambda \right\}.$$

Lemme 8. *Supposons que la fonction $w(\lambda)$ soit définie et sommable sur $[-\pi, \pi]$, $w \geqslant 0$ et $\ln w \in \mathcal{L}^{(1)}$. Posons comme précédemment $w(\lambda) = |\gamma(e^{i\lambda})|^2$, où γ est une fonction extérieure de $\mathcal{H}^2$. Soit enfin $\varphi_\nu(z) = \varphi_\nu(z; w)$ des polynômes orthogonaux pondérés par w. Dans ce cas*

$$s(z;\ w) = s(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\varphi_\nu(0)}\, \varphi_\nu(z) = \frac{1}{\overline{\gamma(0)}} \frac{1}{\gamma(z)}, \quad |z| < 1, \tag{4.4.14}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} k_n(w) = [G(w)]^{-1/2} = \frac{1}{\gamma(0)} \tag{4.4.15}$$

et dans un cercle quelconque de rayon $|z| \leqslant r < 1$ on a uniformément

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(z) = \gamma(z). \tag{4.4.16}$$

Lemme 9. *Dans les conditions du lemme 8 on a*

$$\begin{gathered} k_n^2(w) = \frac{D_{n-1}(w)}{D_n(w)} = \sum_0^n |\varphi_\nu(0;\ w)|^2, \\ G(w) = \left(\sum_0^\infty |\varphi_\nu(0;\ w)|^2\right)^{-2}. \end{gathered} \tag{4.4.17}$$

Pour la démonstration de la première égalité (4.4.17) voir [11], page 56 ; la seconde égalité (4.4.17) découle de la première et de la formule (4.4.15).

Lemme 10. *Si* $w(\lambda)=\frac{1}{|\Gamma(e^{i\lambda})|^2}$, *où* $\Gamma(z)$ *est un polynôme de degré* p *dont tous les zéros se trouvent dans le cercle de rayon* $|z|<1$, *alors pour* $\nu\geqslant p$ *on a*

$$\varphi_\nu(z)=z^{\nu-p}\Gamma(z).$$

Démonstration. Si $\nu\geqslant p$ et $\mu<\nu$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\mu\lambda}\varphi_\nu(e^{i\lambda})\,w(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^{\nu-\mu-1}}{z^p\overline{\Gamma(z)}}=0, \qquad (4.4.18)$$

car la fonction sous l'intégrale est analytique dans le cercle $|z|\leqslant 1$. En effet, si $\Gamma(z)=\sum_0^p \gamma_j z^j$, alors sur $|z|=1$ on a

$$z^p\overline{\Gamma(z)}=\sum_0^p \overline{\gamma}_j z^{p-j},$$

et par conséquent la fonction $(z^p\overline{\Gamma(z)})^{-1}$ admet un prolongement analytique dans le cercle $|z|<1$. L'égalité (4.4.18) signifie que les polynômes $\varphi_\nu(e^{i\lambda})$ sont orthogonaux à toutes les fonctions $e^{i\mu\lambda}$, $\mu<\nu$. L'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_\nu(e^{i\lambda})|^2\,w(\lambda)\,d\lambda=1$$

est évidente. Le lemme se trouve donc démontré.

Lemme 11. *Dans les conditions du lemme* 10 *pour tous les* $\nu\geqslant p$ *on a*

$$\frac{D_\nu(w)}{[G(w)]^{\nu+1}}=\frac{D_p(w)}{[G(w)]^{p+1}}=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\int_{|z|\leqslant 1}\left|\frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}\right|^2 d\sigma\right\}, \qquad (4.4.19)$$

où comme précédemment $\gamma(z)$ *est une fonction extérieure de la classe* $\mathscr{H}^2$, *déterminée par l'égalité* $w=|\gamma|^2$. *L'intégrale est prise sur le cercle* $|z|\leqslant 1$.

Voir la démonstration dans [11], page 102.

Nous savons maintenant tout ce qu'il nous faut sur les polynômes orthogonaux de sorte que nous pouvons revenir à la démonstration du théorème 8.

Ainsi, soient $\varphi_\nu(z)=\varphi_\nu(z;\,1/a)$ des polynômes orthogonaux pondérés par le poids $1/a$. Notons que $\frac{1}{|a(\lambda)|^2}=|\gamma(e^{i\lambda})|^2$, où la fonction extérieure est $\gamma(e^{i\lambda})=\frac{1}{g_1(e^{i\lambda})}$. D'où compte tenu de la formule (4.4.14), on trouve que les coefficients de Fourier de la fonc-

tion $g_1 = 1/\gamma$ sur le système orthogonal $\{\varphi_\nu(e^{i\lambda})\}$ sont $\overline{\varphi_\nu(0)}\,\overline{\gamma(0)}$. Donc

$$\inf_{P_n} \int_{-\pi}^{\pi} | g_1(e^{i\lambda}) - P_n(e^{i\lambda}) |^2 \frac{d\lambda}{a(\lambda)} = | \gamma(0) |^2 \sum_{n+1}^{\infty} | \varphi_\nu(0) |^2.$$

La convergence de la série (4.4.11) permet d'affirmer également que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} | \varphi_\nu(0) |^2 = \sum_{\nu} \nu | \varphi_\nu(0) |^2 < \infty. \qquad (4.4.20)$$

Notre but est de démontrer que la convergence de la série (4.4.20) entraîne celle de la série (4.4.2). A cet effet en plus des polynômes $\varphi_n(z)$ nous allons considérer les polynômes orthogonaux $\varphi_{\nu n}(z) = \varphi_n(z;\ | \varphi_n |^{-2})$ pondérés par $| \varphi_n(e^{i\lambda}) |^{-2}$. On sait que ([11], page 57) les zéros des polynômes orthogonaux $\varphi_n(z; w)$ pondérés par une fonction quelconque w se trouvent dans le domaine $| z | < 1$. Par conséquent les zéros des polynômes $\varphi_n^*(z) = z^n \overline{\varphi_n}(z^{-1})$ se situent à l'extérieur du cercle $| z | \leqslant 1$, de telle sorte que $\varphi_n^*(z)$ sont des fonctions extérieures de $\mathscr{H}^2$. De plus sur $| z | = 1$ on a l'égalité $| \varphi_n |^2 = | \varphi_n^* |^2$, alors $(\varphi_n^*)^{-1}$ est une fonction extérieure dotée du poids $| \varphi_n |^{-2}$.

Puis, en vertu du lemme 10,

$$\varphi_{\nu n}(z) = z^{n-\nu} \varphi_n(z), \qquad \nu \geqslant n.$$

En particulier, $\varphi_{nn}(z) = \varphi_n(z)$. A partir de cette égalité, ainsi que des identités (4.4.12) on trouve

$$\varphi_{\nu n}(z) = \varphi_\nu(z), \qquad \nu \leqslant n. \qquad (4.4.21)$$

De toute évidence, les polynômes orthogonaux $\varphi_\nu(z)$ sont linéairement indépendants, de sorte que pour tous les k les fonctions $e^{ik\lambda}$ sont des combinaisons linéaires des polynômes $\varphi_\nu(z)$, $0 \leqslant \nu \leqslant k$. D'où et en vertu de (4.4.21) on trouve que les $n+1$ premiers coefficients de Fourier $c_0, \ldots, c_n$ (donc également $c_{-n}, \ldots, c_{-1}, c_0$) des fonctions $\frac{1}{a(\lambda)}$ et $\frac{1}{| \varphi_n(e^{i\lambda}) |^{-2}}$ coïncident. Par conséquent

$$D_s(| \varphi_n |^{-2}) = D_s\left(\frac{1}{a}\right), \qquad s \leqslant n.$$

En utilisant les lemmes 8 et 9 on peut trouver à l'aide de cette dernière égalité que pour tous les $s \geqslant n$ on a

$$\ln \frac{D_s(| \varphi_n |^{-2})}{G(| \varphi_n |^{-2})^{s+1}} = \ln \frac{D_n(| \varphi_n |^{-2})}{G(| \varphi_n |^{-2})^{n+1}} =$$

$$= \sum_{1}^{n} \ln \frac{D_k(| \varphi_n |^{-2})}{D_{k-1}(| \varphi_n |^{-2})} + \ln D_0(| \varphi_n |^{-2}) - (n+1) \ln G(| \varphi_n |^{-2}) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{\sum\limits_{0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum\limits_{0}^{k}|\varphi_\nu(0)|^2}=-\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-\frac{\sum\limits_{k+1}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum\limits_{0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}\right). \quad (4.4.22)$$

Puis en supposant que $\dfrac{\sum\limits_{k+1}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum\limits_{0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}=\alpha$ on obtient

$$-\ln\left(1-\frac{\sum\limits_{k+1}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum\limits_{0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{s}\leqslant$$

$$\leqslant\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\leqslant\frac{2\alpha}{1-\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\cdot 2\frac{\sum\limits_{0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}{|\varphi_0(0)|^2}=C_1\alpha,$$

C_i étant ici et ci-dessous des constantes. D'où et en vertu de (4.4.22) on obtient l'inégalité

$$\ln\frac{D_s(|\varphi_n|^{-2})}{G(|\varphi_n|^{-2})^{s+1}}\leqslant\frac{C_1}{\sum\limits_{0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=k+1}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{|\varphi_0(0)|^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|\varphi_\nu(0)|^2=C_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|\varphi_\nu(0)|^2.$$

D'après le lemme 11 on a de plus

$$\iint\limits_{|z|\leqslant 1}\left|\frac{(\varphi_n^*(z))'}{\varphi_n^*(z)}\right|^2 d\sigma\leqslant C_3\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|\varphi_\nu(0)|^2. \quad (4.4.23)$$

En vertu de l'égalité (4.4.16) du lemme 8 on a $\lim\limits_{n}\varphi_n^*(z)=\dfrac{1}{g_1(z)}$ uniformément dans un cercle quelconque de rayon $|z|\leqslant r<1$. Avec les fonctions analytiques $\varphi_n^*(z)$ les dérivées $(\varphi_n^*(z))'$ convergent uniformément dans ce cercle vers $\left(\dfrac{1}{g_1(z)}\right)'$. Donc en passant de

l'inégalité (4.4.23) à la limite pour $n \to \infty$ on obtient à partir du lemme de Fatou

$$\iint\limits_{|z|\leqslant 1} \left| \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} \right|^2 d\sigma \leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, |\varphi_\nu(0)|^2. \qquad (4.4.24)$$

Exprimons l'intégrale dans (4.4.24) à l'aide des coefficients de Fourier de la fonction sommable $\ln g_1(e^{i\lambda})$.

Remarquons tout d'abord que la fonction $\ln g_1(e^{i\lambda})$ est la valeur limite sur la circonférence de rayon $|z| = 1$ de la fonction $\ln g_1(z)$ analytique dans le cercle de rayon $|z| < 1$ (la fonction extérieure $g_1(z)$ n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle $|z| < 1$). Donc le développement de Fourier de la fonction $\ln g_1(e^{i\lambda})$ ne contient que des puissances non négatives de $e^{i\lambda}$. De même, la série de Fourier de la fonction $\ln \overline{g_1(e^{i\lambda})}$ ne contient que des puissances non positives de $e^{i\lambda}$. De plus

$$\ln \overline{g_1(e^{i\lambda})} + \ln g_1(e^{i\lambda}) = \ln a(\lambda).$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier de la fonction $\ln g_1(e^{i\lambda})$ coïncident avec ceux de la fonction $\ln a(\lambda)$, c'est-à-dire

$$\ln g_1(e^{i\lambda}) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s e^{is\lambda}.$$

En passant au calcul de l'intégrale dans (4.4.24) on remarque tout d'abord que pour $|z| \leqslant r < 1$

$$\frac{g_1'(z)}{g_1(z)} = (\ln g_1(z))' = \sum_{s=1}^{\infty} s a_s z^{s-1}.$$

Donc

$$\iint\limits_{|z|\leqslant r} \left| \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} \right|^2 d\sigma = \int_0^r \rho \, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{s=1}^{\infty} s a_s \rho^{s-1} e^{i\lambda(s-1)} \right|^2 d\lambda =$$

$$= 2\pi \sum_{s=1}^{\infty} s^2 |a_s|^2 \int_0^r \rho^{2s-1} \, d\rho = \pi \sum_{s=1}^{\infty} s \, |a_s|^2 r^{2s} \to \pi \sum_{s=1}^{\infty} s \, |a_s|^2.$$

D'où et en vertu de l'inégalité (4.4.24) on obtient l'assertion du théorème :

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} |s| \, |a_s|^2 < \infty.$$

Le théorème 8 se trouve ainsi entièrement démontré.

§ 5. Condition de régularité absolue. Processus à temps continu

Dans le cas des processus à temps continu on peut seulement démontrer un résultat plus faible que le théorème 8, analogue au lemme 6, que nous allons maintenant formuler.

Soit $\xi(t)$ un processus stationnaire à temps continu. Comme un processus absolument régulier est régulier, on peut sans perdre de généralité supposer que le processus $\xi(t)$ a pour densité spectrale $f(\lambda)$ et que $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$, où $g \in \mathcal{H}^2$ dans le demi-plan supérieur. Désignons par $c_\varepsilon(u)$ la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)} \frac{i}{i+\varepsilon\lambda}$.

Théorème 9. *Un processus gaussien stationnaire $\xi(t)$ est absolument régulier si et seulement s'il est régulier et que pour un $T \geqslant 0$ quelconque on a*

$$I(T) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_{-\infty}^{-T} |u|\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du < \infty. \qquad (4.5.1)$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 6. Comme précédemment, on utilise le théorème 4. D'après ce théorème il suffit d'établir que l'inégalité $I(T) < \infty$ équivaut au fait que l'opérateur B_T soit nucléaire. Tout comme dans le § 4, il serait plus commode d'envisager les opérateurs B_T^+ unitairement équivalents aux opérateurs B_T. Si de même que dans le § 4 on conserve les désignations habituelles dans l'application isométrique de $H(-\infty, \infty)$ dans $L(F)$, on a

$$B_T^+ = \mathcal{P}_T^+ \mathcal{P}_0^- \mathcal{P}_T^+,$$

où $\mathcal{P}_T^+$ est le projecteur dans $L(F)$ sur $L_{(T,\infty)}(F)$ et $\mathcal{P}_0^-$ le projecteur dans $L(F)$ sur $L_{(-\infty,0)}(F)$. Il suffit donc de considérer l'opérateur de $L_{(T,\infty)}(F)$ sur $L_{(T,\infty)}(F)$.

D'une manière analogue au lemme 2 du chapitre II on démontre les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}_T^+ = g^{-1}\Pi_T^+ g, \quad \mathcal{P}_0^- = \bar{g}^{-1}\Pi_0^- \bar{g}, \qquad (4.5.2)$$

où cette fois Π_T^+ est le projecteur dans $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ sur $e^{i\lambda T}\mathcal{H}^2$ et Π_0^- le projecteur dans $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ sur $\mathcal{H}^{2-}$.

Nous allons montrer que les conditions du théorème sont nécessaires. Introduisons les fonctions

$$e_x(\lambda; \varepsilon) = e_x(\lambda) = e_x = i\frac{e^{ix\lambda}}{g(\lambda)(i+\varepsilon\lambda)}, \qquad x \geqslant 0.$$

Il est évident que $e_\varepsilon \in L_{(x,\infty)}(F)$. $\Big($Rappelons qu'en vertu des résultats du § 2, chap. II, on a $L_{(x,\infty)}(F) = \frac{e^{ix\lambda}}{\sigma}\mathscr{H}^2.\Big)$

Lemme 12. *On a*

$$S_T = \int_T^{\infty} \langle B_T e_x, e_x\rangle_F \, dx < \infty$$

si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{-T} |u|\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du < \infty.$$

De plus

$$S_T = \int_{-\infty}^{-T} (|u|-T)\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du. \tag{4.5.3}$$

Démonstration. En vertu des formules (4.5.2) pour $x, y \geqslant T$ on a

$$\langle B_T^+ e_x, e_y\rangle_F = \langle \mathscr{P}_0^- e_x, e_y\rangle_F = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_0^-\left(\frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\,\frac{ie^{i\lambda x}}{i+\varepsilon\lambda}\right)\overline{\frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\,\frac{ie^{iy\lambda}}{i+\varepsilon\lambda}}\,d\lambda.$$

De plus

$$\frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\,\frac{ie^{ix\lambda}}{i+\varepsilon\lambda} = \int_{\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} c_\varepsilon(u-x)\,du,$$

$$\frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\,\frac{ie^{iy\lambda}}{i+\varepsilon\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} c_\varepsilon(u-y)\,dy,$$

$$\Pi_0^-\,\frac{\bar g}{g}\,\frac{ie^{ix\lambda}}{i+\varepsilon\lambda} = \int_{-\infty}^{0} e^{iu\lambda} c_\varepsilon(u-x)\,du.$$

Par corséquent, pour $x, y \geqslant T$,

$$\langle B_T^+ e_x, e_y\rangle_F = \int_{-\infty}^{0} c_\varepsilon(u-x)\,\overline{c_\varepsilon(u-y)}. \tag{4.5.4}$$

En particulier, si $x \geqslant T$, on a

$$\langle B_T^+ e_x, e_x\rangle_F = \int_{-\infty}^{-x} |c_\varepsilon(u)|^2\,du \tag{4.5.5}$$

et donc

$$\int_T^\infty \langle B_T^+ e_x,\ e_x\rangle_F\, dx = \int_T^\infty dx \int_{-\infty}^{-x} |c_\varepsilon(u)|^2\, du. \tag{4.5.6}$$

Si les intégrales dans (4.5.6) sont finies, la fonction $C(x) = \int_{-\infty}^{-x} |c_\varepsilon(u)|^2\, du$ est intégrable, mais, cette fonction étant monotone, pour $x \to \infty$ on a $C(x) = o(x^{-1})$ *). En intégrant par parties l'intégrale dans le second membre de (4.5.6) on trouve

$$\int_T^\infty dx \int_{-\infty}^{-x} |c_\varepsilon(u)|^2\, du = -TC(T) + \int_T^\infty u\, |c_\varepsilon(-u)|^2\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{-T} (|u| - T)\, |c_\varepsilon(u)|^2\, du$$

Inversement, si l'intégrale dans le second membre de (4.5.3) est convergente, on a

$$C(x) \leqslant \frac{1}{|x|} \int_{-\infty}^{-x} |u|\, |c_\varepsilon(u)|^2\, du = o(x^{-1})$$

et dans (4.5.6) on peut de nouveau intégrer par parties. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Ainsi, supposons que le processus $\xi(t)$ soit absolument régulier. D'après le théorème 4 ceci signifie que l'on peut trouver un nombre τ, $0 < \tau < \infty$, tel que l'opérateur B_τ^+ soit un opérateur complètement continu de trace finie. Soient $\varphi_j(\lambda) = \varphi_j$ les vecteurs propres (normés) de l'opérateur B_τ^+ et μ_j les nombres propres correspondants. Pour tous les $\varepsilon > 0$, $x \geqslant \tau$, on a

$$\langle B_\tau^+ e_x,\ e_x\rangle_F = \sum_j |\beta_j(x)|^2 \langle B_\tau^+ \varphi_j,\ \varphi_j\rangle_F = \sum \mu_j\, |\beta_j(x)|^2, \tag{4.5.7}$$

avec $\beta_j(x) = \langle e_x,\ \varphi_j\rangle_F$. Comme

$$\varphi_j \in L_{(\tau,\,\infty)}(F) = \frac{e^{i\lambda\tau}}{g}\, \mathscr{H}^2,$$

---

*) Supposons que $C(x) \geqslant 0$, $C(x) \downarrow$ et $\int_T^\infty C(x)\, dx < \infty$. Pour des x grands

$$C(x) \leqslant \frac{2}{x} \int_{x/2}^{x} C(y)\, dy = o(x^{-1}).$$

les fonctions φ_j s'écrivent $\varphi_j = \frac{e^{i\lambda\tau}\psi_j}{g}$, $\psi_j \in \mathscr{H}^2$, de sorte que

$$\beta_j(x) = \langle e_x, \varphi_j\rangle_F = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x-\tau)}\overline{\psi_j(\lambda)}}{i+\varepsilon\lambda}\, d\lambda,$$

$$\int_{-\infty} |\beta_j(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_j(\lambda)|^2}{1+\varepsilon^2\lambda^2}\, d\lambda = \left\| \frac{i\varphi_j}{1+\varepsilon\lambda} \right\|_F^2 .$$

D'où et en vertu de (4.5.7) on obtient l'inégalité

$$\int_{\tau}^{\infty} \langle B_\tau^+ e_x, e_x\rangle_F\, dx = \sum_j \mu_j \left\| \frac{i\varphi_j}{i+\varepsilon\lambda} \right\|_F^2 \leqslant \sum_j \mu_j \|\varphi_j\|_F^2 = \sum_j \mu_j = \operatorname{Sp} B_\tau^+.$$

Selon le lemme 12 on a

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_{-\infty}^{-\tau} (|u|-\tau)\, |c_\varepsilon(u)|^2\, du = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_{\tau}^{\infty} \langle B_\tau^+ e_x, e_x\rangle_F\, dx \leqslant \operatorname{Sp} B_\tau^+.$$

Posons $T = 2\tau$. La dernière inégalité signifie que

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_{-\infty}^{-T} |u|\, |c_\varepsilon(u)|^2\, du \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, 2 \int_{-\infty}^{-\tau} (|u|-\tau)\, |c_\varepsilon(u)|^2\, du \leqslant \operatorname{Sp} B_\tau^+ < \infty. \tag{4.5.8}$$

Nous avons ainsi démontré que les conditions du théorème sont nécessaires.

Nous allons montrer maintenant qu'elles sont suffisantes. A cet effet il faut construire une base orthonormée quelconque $\{\alpha_j\}$ dans $L_{(T,\infty)}(F)$ et montrer que la série $\sum_j \langle B_T^+\alpha_j, \alpha_j\rangle_F$ est convergente. La somme de cette série sera justement égale à la trace de l'opérateur *) B_T^+. Les fonctions suivantes

$$\alpha_j(\lambda) = e^{i\lambda T} \frac{a_j(\lambda)}{g(\lambda)}, \qquad a_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{i+\lambda} \left(\frac{i-\lambda}{i+\lambda}\right)^j,$$
$$j = 0, 1, \ldots$$

seront prises pour cette base.

L e m m e 13. *Les fonctions* $\alpha_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots$, *forment un système orthonormé complet dans* $L_{(\tau,\infty)}(F)$.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de considérer le cas $T = 0$. Comme $L_{(0,\infty)}(F) = L^+(F) = \frac{1}{g}\mathscr{H}^2$ (voir § 2, chapitre II), il y a

*) Voir [5], page 55; notons que B_T^+ sont des opérateurs positifs.

lieu de démontrer que les fonctions $a_j(\lambda)$ forment un système orthonormé complet dans $\mathscr{H}^2$.

Pour fixer les idées supposons que $k \geqslant l$, on a alors *)

$$(a_k, a_l)^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda^2} \left(\frac{i-\lambda}{i+\lambda}\right)^{k-l} d\lambda.$$

Dans cette intégrale la fonction sous le signe somme est analytique dans le demi-plan supérieur à l'exception du pôle au point i. Le résidu de cette fonction en ce point est nul, si $k - l > 0$, et égal à $\frac{1}{2i}$ si $k - l = 0$. Par conséquent

$$(a_k, a_l)^{(2)} = \delta_{kl}.$$

Nous avons ainsi établi que le système a_j, $j = 0, 1, \ldots$, et donc également le système α_j, $j = 0, 1, \ldots$, sont orthonormés.

Il reste à vérifier la complétude du système a_j, $j = 0, 1, \ldots$, dans $\mathscr{H}^2$. Posons $\varphi(\lambda) = \varphi \in \mathscr{H}^2$. Il suffit de montrer que, si $(\varphi, a_j)^{(2)} = 0$ pour tous les $j = 0, 1, \ldots$, on a $\varphi(\lambda) \equiv 0$. La fonction $\varphi \in \mathscr{H}^2$ est la valeur limite de la fonction $\varphi(z)$, $z = \lambda + i\mu$ analytique dans le demi-plan supérieur $\mu > 0$ et telle que

$$\sup_{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda + i\mu)|^2 d\lambda < \infty.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \overline{a_j(\lambda)} d\lambda = (\varphi, a_j)^{(2)}$$

peut être calculée par la théorie des résidus; la fonction sous le signe somme a dans le demi-plan supérieur un pôle unique de l'ordre $j + 1$ au point $z = i$. Par conséquent pour tous les $j = 0, 1, \ldots$ on a les égalités

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \overline{a_j(\lambda)} d\lambda = \frac{2\sqrt{\pi}}{j!} (-1)^{j+1} \frac{d^j}{dz^j} \varphi(z) (z+i)^{j+1} \Big|_{z=i} = 0.$$

En considérant ces égalités successivement pour $j = 0, 1, \ldots$, on obtient que toutes les dérivées $\varphi^{(j)}(i)$, $j = 0, 1, \ldots$, de la fonction analytique $\varphi(z)$ sont nulles. Donc $\varphi(z) \equiv 0$, $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Le lemme se trouve donc démontré.

*) Rappelons que $(\varphi, \psi)^{(2)}$ désigne le produit scalaire dans l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty) \supseteq \mathscr{H}^2$.

Passons au calcul de la somme $\sum_j \langle B_\tau^+ \alpha_j, \alpha_j \rangle_F$. Désignons par $A_j(x)$ la transformée de Fourier de la fonction $a_j(\lambda)$, soit :

$$a_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\lambda x} A_j(x)\, dx.$$

Soit de plus $\alpha_{j\varepsilon}(\lambda) = i \frac{\alpha_j(\lambda)}{i+\varepsilon\lambda} = \frac{i \cdot a_j(\lambda)}{1+\varepsilon\lambda} \frac{e^{i\lambda T}}{g(\lambda)}$. On a alors en vertu de (4.5.6)

$$\langle B_\tau^+ \alpha_{j\varepsilon}, \alpha_{j\varepsilon} \rangle_F = \int_0^\infty \int_0^\infty \langle B_T^+ e_{x+\tau}, e_{x+\tau} \rangle A_j(x) \overline{A_j(y)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^0 du \left| \int_0^\infty c_\varepsilon(u - x - \tau) A_j(x)\, dx \right|^2.$$

En se basant sur le lemme 13 il est facile de montrer que les fonctions $A_j(x)$ forment un système orthonormé complet dans $\mathscr{L}^2(0, \infty)$. En effet, la transformée de Fourier des fonctions de $\mathscr{H}^2$ s'annule sur la demi-droite $(-\infty, 0)$; inversement, toute fonction de $\mathscr{L}^2(0, \infty)$, complétée de zéro sur la demi-droite $(-\infty, 0)$, peut être considérée comme la transformée de Fourier des fonctions de $\mathscr{H}^2$ (en fait cette assertion est le théorème de Paley-Wiener). Par conséquent l'opérateur $U : \mathscr{H}^2 \to \mathscr{L}^2(0, \infty)$ faisant correspondre à chaque fonction de $\mathscr{H}^2$ sa transformée de Fourier réalise la correspondance isométrique entre $\mathscr{H}^2$ et $\mathscr{L}^2(0, \infty)$. En particulier, comme $\{a_j\}$ est un système orthonormé complet dans $\mathscr{H}^2$, les fonctions A_j forment un système orthonormé complet dans $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ *).

Considérons la fonction $c_\varepsilon(u - x - T)$ pour u, T donnés en tant qu'élément de l'espace $\mathscr{L}^2(0, \infty)$ et écrivons $c_\varepsilon(u - x - T)$ comme suit :

$$c_\varepsilon(u - x - T) = \sum_{j=0}^\infty \gamma_j(u) A_j(x),$$

où

$$\gamma_j(u) = \int_0^\infty c_\varepsilon(u - x - T) A_j(x)\, dx$$

---

*) Il est facile de calculer que $A_j(x) = e^{-x} L_j(2x)$, où $L_j(x) = \sum_{\nu=0}^{j} c_j^\nu \frac{(-x)^\nu}{\nu}$ est un polynôme de Laguerre d'ordre j (voir [24]).

et pour u quelconque

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j(u)|^2 = \int_0^{\infty} |c_\varepsilon(u-x-T)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{u-T} |c_\varepsilon(v)|^2\,dv.$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle B_T\alpha_{j\varepsilon}, \alpha_{j\varepsilon}\rangle_F = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} du \left| \int_0^{\infty} c_\varepsilon(u-x-\tau) A_j(x)\,dx \right|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} |\gamma_j(u)|^2\,du = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{u-T} |c_\varepsilon(v)|^2\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{-T} dx \int_{-\infty}^{x} |c_\varepsilon(u)|^2\,du = \int_{-\infty}^{-T} (|u|-T)\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du.$$

Posant $\varepsilon \to 0$ on trouve que pour tous les n

$$\sum_{j=0}^{n} \langle B_T\alpha_j, \alpha_j\rangle_F = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{n} \langle B_T\alpha_{j\varepsilon}, \alpha_{j\varepsilon}\rangle_F =$$

$$= \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{n} \langle B_T\alpha_{j\varepsilon}, \alpha_{j\varepsilon}\rangle_F \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=0}^{\infty} \langle B_T\alpha_{j\varepsilon}, \alpha_{j\varepsilon}\rangle_F =$$

$$= \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-T} (|u|-T)\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du.$$

Donc

$$\operatorname{Sp} B_T = \sum_{j=0}^{\infty} \langle B_T\alpha_j, \alpha_j\rangle_F \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-T} (|u|-T)\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-T} |u|\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du < \infty. \qquad (4.5.9)$$

Ce qui démontre le théorème.

R e m a r q u e. Si l'on compare les inégalités (4.5.8) et (4.5.9) on voit facilement que pour tous les T il existe une limite, probablement infinie, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-T} |u|\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du$ et que

$$\operatorname{Sp} B_T = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-T} (|u|-T)\,|c_\varepsilon(u)|^2\,du.$$

CHAPITRE V

RÉGULARITÉ COMPLÈTE. PROCESSUS À TEMPS DISCRET

§ 1. Définitions. Constructions préliminaires. Exemples

Dans ce chapitre nous allons considérer un processus $\xi(t)$ à temps discret $t = 0, \pm 1, \ldots,$ stationnaire au sens général. Comme les notions dont nous nous servirons s'expriment en termes de deux premiers moments, il est indifférent que le processus soit gaussien ou non.

Rappelons (voir chapitre IV) que le processus $\xi(t)$ *est appelé complètement régulier si le coefficient de régularité est*

$$\rho(\tau) = \sup_{\eta_1 \in H(\tau,\ \infty),\ \eta_2 \in H(-\infty,\ 0)} |\mathbf{M}\eta_1\overline{\eta}_2| = \sup |(\eta_1, \eta_2)| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0,$$

le suprémum étant pris sur η_1, η_2 *satisfaisant à la condition de normalisation* $\|\eta_1\| = \|\eta_2\| = 1$.

Dans le présent chapitre nous allons étudier les propriétés des caractéristiques spectrales des processus $\xi(t)$ complètement réguliers. A cet effet il faut avant tout écrire l'expression du coefficient de régularité sous forme spectrale.

Rappelons que tout processus complètement régulier est (linéairement) régulier et donc

a) sa densité spectrale $f(\lambda)$ admet la représentation

$$f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2, \tag{5.1.1}$$

où g est une fonction de la classe de Hardy $\mathscr{H}^2$ dans le cercle unitaire ;

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f(\lambda)\, d\lambda| < \infty. \tag{5.1.2}$$

(Les formules (5.1.1) et (5.1.2) sont en fait équivalentes et

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \ln f(\lambda)\, d\lambda\right\}, \quad |z| < 1.)$$

D'où et en vertu du théorème 1 du chapitre II on obtient immédiatement

$$\rho(\tau) = \sup_{\varphi,\,\psi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} \varphi(e^{i\lambda}) \psi(e^{i\lambda}) f(\lambda)\, d\lambda \right| = \sup_{\varphi,\,\psi} |\langle e^{i\lambda\tau}\varphi, \bar{\psi}\rangle_F| \tag{5.1.3}$$

où le suprémum est pris sur toutes les fonctions $\varphi(e^{i\lambda})$, $\psi(e^{i\lambda})$ du sous-espace $L^+(F) = \frac{1}{g}\mathscr{H}^2$ qui satisfont à la condition de normalisation

$$\|\varphi\|_F = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} = 1,$$

$$\|\psi\|_F = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\, d\lambda \right)^{1/2} = 1. \tag{5.1.4}$$

Il est bon de noter que $\rho(\tau)$ ne change pas si dans (5.1.3) on prend le suprémum sur un ensemble dense quelconque de fonctions dans $L^+(F)$ satisfaisant à (5.1.4), par exemple, sur les polynômes ou les fonctions de $\mathscr{H}^2$.

Si $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^2$, on a $\theta = \varphi\psi \in \mathscr{H}^1$ et $\|\theta\|_F^{(1)} \leqslant \|\varphi\|_F \cdot \|\psi\|_F$. Inversement, si $\theta \in \mathscr{H}^1$, on peut écrire cette fonction sous la forme (voir § 1, chap. II) d'un produit $\theta = \varphi\psi$ de deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^2$, de plus pour presque tous les λ on a $|\varphi| = |\psi| = |\theta|^{1/2}$ et par conséquent on a également $\|\theta\|_F^{(1)} = \|\varphi\|_F = \|\psi\|_F$. Donc en plus de (5.1.3) on a encore l'expression suivante pour $\rho(\tau)$:

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} \theta(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \right|, \tag{5.1.5}$$

où on prend le suprémum sur tous les $\theta \in \mathscr{H}^1$, $\|\theta\|_F^{(1)} \leqslant 1$.

Pour trouver encore une expression de $\rho(\tau)$ dont on aura besoin dans la suite on se servira du théorème de Beurling, d'après lequel l'ensemble des fonctions $\{\varphi g\}$, où $\varphi(z)$ parcourt tous les polynômes, est dense dans l'espace $\mathscr{H}^2$. En partant de (5.1.3) on trouve

$$\rho(\tau) = \sup_{\varphi,\,\psi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda}) \psi(e^{i\lambda}) e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \right| =$$

$$= \sup_{\varphi,\,\psi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi g)(\psi g) e^{i\lambda\tau} \frac{\bar{g}}{g}\, d\lambda \right| =$$

$$= \sup_{\varphi_1,\,\psi_1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(e^{i\lambda}) \psi_1(e^{i\lambda}) e^{i\lambda\tau} \frac{\overline{g(e^{i\lambda})}}{g(e^{i\lambda})}\, d\lambda \right|, \tag{5.1.6}$$

dans la dernière intégrale on prend le suprémum sur tous les φ_1, ψ_1 d'une sphère de rayon unité de l'espace $\mathcal{H}^2$.

Enfin, tout comme de (5.1.3) on a obtenu (5.1.5), on peut tirer de (5.1.6) l'égalité

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \theta(e^{i\lambda}) e^{i\tau\lambda} \overline{\frac{g(e^{i\lambda})}{g(e^{i\lambda})}} d\lambda \right|, \tag{5.1.7}$$

où cette fois θ parcourt une sphère de rayon unité de l'espace $\mathcal{H}^1$.

Dans ce chapitre nous verrons seulement des fonctions spectrales absolument continues, données par leurs densités (spectrales). Pour ne pas introduire de désignations supplémentaires, tout le long de ce chapitre nous utiliserons les notations $L(f)$, $L^+(g)$, $\|\cdot\|_h$, $\langle\cdot, \cdot\rangle_f$, etc., au lieu de $L(F)$, $L^+(G)$, $\|\cdot\|_H$, $\langle\cdot, \cdot\rangle_F$, etc., où $f = F'$, $g = G'$, $h = H'$, etc.

En revenant au problème de la description des processus complètement réguliers remarquons qu'on peut le formuler comme suit: *décrire une classe de fonctions $f(\lambda)$ non négatives sommables sur $[-\pi, \pi]$ pour lesquelles le coefficient de régularité $\rho(\tau)$ donné sous la forme* (5.1.3) *ou* (5.1.5) *tend vers zéro pour $\tau \to \infty$*. Dans notre étude nous utiliserons cette formulation analytique.

Avant de passer à une étude plus détaillée nous allons formuler certaines assertions, découlant presque immédiatement de (5.1.3) ou de (5.1.5), mais permettant toutefois de se faire une idée générale de la structure des densités spectrales pour des processus complètement réguliers.

En posant avant tout $\theta(\lambda) \equiv 1$ dans (5.1.5) on trouve que le n-ième coefficient de Fourier de $f(\lambda)$ satisfait à l'inégalité

$$|B(n)| \leqslant \rho(n) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Par conséquent la condition de régularité complète impose certaines conditions à la régularité de $f(\lambda)$. Ainsi, si $\sum \rho(n) < \infty$, $f(\lambda)$ est continue. Le perfectionnement de cette méthode très grossière va nous permettre d'obtenir ci-dessous des résultats bien plus forts.

On tire de l'inégalité (5.1.2) que $f(\lambda)$ ne peut avoir de zéros d'un ordre très élevé. Ci-dessous (§ 5) nous montrerons qu'en fait les restrictions imposées aux zéros de $f(\lambda)$ sont bien plus rigoureuses (grossièrement, $f(\lambda)$ est un produit d'une fonction sans zéros par le carré du module d'un polynôme).

Inversement, si la densité spectrale $f(\lambda)$ est suffisamment lisse et positive, le processus aléatoire correspondant est complètement régulier. On a le théorème suivant:

Théorème 1. *Si la densité spectrale $f(\lambda)$ est continue* *)

*) Rappelons que les points π et $-\pi$ sont identiques.

et strictement positive, donc $f(\lambda) \geqslant m > 0$, *le processus stationnaire correspondant à* $f(\lambda)$ *est complètement régulier, avec*

$$\rho(\tau) \leqslant \frac{1}{m} E_{\tau-1}(f). \tag{5.1.8}$$

Ici et ci-dessous nous désignerons par $E_n(h)$ la meilleure approximation de la fonction $h(\lambda)$ par des polynômes trigonométriques de degré non supérieur à n sur le segment $[-\pi, \pi]$ dans la métrique uniforme.

En effet, pour un polynôme trigonométrique quelconque $\theta(\lambda)$ de degré non supérieur à $\tau - 1$ et une fonction quelconque $\theta \in \mathscr{H}^1$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda)\, Q(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Donc si $P(\lambda)$ est le polynôme de meilleure approximation pour f de degré non supérieur à $\tau - 1$, en vertu de (5.1.5) on a

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda)\,[f(\lambda) - P(\lambda)]\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant E_{\tau-1}(f) \sup_{\|\theta\|_f^{(1)}=1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} |\theta(\lambda)|\, d\lambda \right| \leqslant \frac{1}{m} E_{\tau-1}(f).$$

La condition $f \geqslant m$ peut être affaiblie en remarquant que l'on a le résultat suivant.

Théorème 2. *Si* $w(\lambda)$ *est la densité spectrale d'un processus complètement régulier, et* $P(z)$ *un polynôme de degré* n, *alors*

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda) \tag{5.1.9}$$

est également la densité spectrale d'un processus complètement régulier. De plus on a

$$\rho(\tau;\ f) \leqslant \rho(\tau - n;\ w). \tag{5.1.10}$$

Comme $e^{i\lambda n}|P|^2 \in \mathscr{H}^1$ et $\|\theta P\|_w^{(1)} = \|\theta\|_f^1$, on a par conséquent

$$\rho(\tau;\ f) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\tau-n)\lambda}\theta(\lambda)\,[e^{in\lambda}|P(\lambda)|^2]\, w(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\theta\|_w^{(1)}\leqslant 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\tau-n)\lambda}\theta(\lambda)\, w(\lambda)\, d\lambda \right| = \rho(\tau - n;\ w).$$

Le théorème se trouve donc démontré. Ci-dessous nous rencontrerons souvent des développements du type (5.1.9).

§ 2. Première méthode d'étude. Théorème de Helson-Sarasan

Nous donnerons ici la description proposée par Helson et Sarasan *) d'un ensemble de densités spectrales de processus complètement réguliers. Comme leur méthode est essentiellement basée sur l'utilisation du plan complexe, il est commode de considérer que la densité spectrale $f(\lambda)$ est donnée sur la circonférence C: $|z| = 1$, $z = re^{i\lambda}$.

Théorème 3. *Pour qu'un processus stationnaire $\xi(t)$ à temps discret soit complètement régulier, il faut et il suffit que sa densité spectrale $f(\lambda)$ puisse s'écrire comme suit:*

$$f(\lambda) = w(\lambda)\,|P(e^{i\lambda})|^2, \tag{5.2.1}$$

$P(z)$ étant un polynôme à racines sur $|z| = 1$, et la fonction $w(\lambda)$, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, admet la représentation

$$w = \exp\{r_\varepsilon + u_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon\}, \tag{5.2.2}$$

où r_ε est continu sur C et $\|u_\varepsilon\|^{(\infty)} + \|v_\varepsilon\|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon$.

Démonstration de la suffisance. En vertu du théorème 2, on peut poser $P \equiv 1$. En utilisant le théorème de Weierstrass, choisissons le polynôme trigonométrique Q_ε de degré τ_0 de telle sorte que

$$e^{r_\varepsilon} = Q_\varepsilon(1+\theta), \quad \max_\lambda |\theta(\lambda)| < \varepsilon.$$

On a alors ($P \equiv 1$!)

$$f(\lambda) = e^{r_\varepsilon + u_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon} = Q_\varepsilon e^{\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}(1+\theta_\varepsilon), \tag{5.2.3}$$

où $\|\theta_\varepsilon\|^{(\infty)} \leqslant 7\varepsilon$, si $\varepsilon \lesssim 1$.

Posons $f_\varepsilon = |Q_\varepsilon|\,|e^{\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}|$. En vertu de (5.2.3) on a

$$\frac{1}{2}\|\varphi\|_{f_\varepsilon} \leqslant \|\varphi\|_f \leqslant 2\|\varphi\|_{f_\varepsilon},$$

pourvu que ε soit suffisamment petit. La fonction $e^{i\lambda\tau_0} Q_\varepsilon(\lambda) \times$ $\times\, e^{\tilde{v}_\varepsilon(\lambda) - iv_\varepsilon(\lambda)}$ est sommable et se trouve être la valeur limite (sur la circonférence $|z| = 1$) d'une fonction analytique dans le cercle $|z| < 1$. Par conséquent pour deux polynômes quelconques $\varphi(z)$, $\psi(z)$ et $\tau > \tau_0$ quelconques on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda})\,\psi(e^{i\lambda})\,e^{i\lambda\tau} Q_\varepsilon(\lambda)\,e^{\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}\,d\lambda = 0.$$

*) H. Helson, Sarasan, *Past and Future*. Math. Scand. 21, n° 1 (1967), 5-16.

Donc en vertu de (5.2.3) pour $\tau > \tau_0$ quelconques on a

$$\rho(\tau) = \sup_{\varphi,\psi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda}) \psi(e^{i\lambda}) e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi,\psi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\lambda})| \, |\psi(e^{i\lambda})| \, |f_\varepsilon(\lambda)| \, |\theta_\varepsilon(\lambda)| \, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 7\varepsilon \|\varphi\|_{f_\varepsilon} \|\psi\|_{f_\varepsilon} \leqslant 28\varepsilon. \qquad (5.2.4)$$

Nous avons ainsi démontré que les conditions du théorème sont suffisantes.

D é m o n s t r a t i o n d e l a n é c e s s i t é d e s c o n d i t i o n s. En nous basant sur l'égalité (5.1.7) démontrons d'abord le lemme suivant.

L e m m e 1. *Le coefficient de régularité satisfait à l'égalité*

$$\rho(\tau) = \inf_A \left\| \frac{\bar{g}}{g} e^{i\lambda\tau} = A \right\|^{(\infty)}, \qquad (5.2.5)$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions $A \in \mathscr{H}^\infty$, $A(0) = 0$.

L'assertion du lemme est un cas particulier du principe général de la dualité dans les problèmes d'extrémum analogues, basé sur le théorème bien connu de Hahn-Banach.

En effet, l'intégrale dans (5.1.7) donne une fonctionnelle $l(\theta)$ dans $\mathscr{L}^1$. Cette fonctionnelle, considérée seulement dans $\mathscr{H}^1 \subset \subset \mathscr{L}^1(-\pi_0, \pi)$, conformément à (5.1.7), a pour norme $\rho(\tau)$. Tout prolongement $l_1(\theta)$ de cette fonctionnelle $l(\theta)$ de l'espace $\mathscr{H}^1$ sur tout l'espace $\mathscr{L}^1$ s'écrit

$$l_1(\theta) = l(\theta) - l^*(\theta),$$

où $l^*(\theta)$ s'annule sur $\mathscr{H}^1$. La norme de tous les prolongements n'est pas inférieure à $\rho(\tau)$. Selon le théorème de Hahn-Banach, parmi les prolongements, il y en a un, l_1, dont la norme est exactement égale à $\rho(\tau)$. Par conséquent

$$\rho(\tau) = \inf_{l^*} \| l - l^* \|,$$

dans cette égalité le symbole $\|\cdot\|$ désigne la norme de la fonctionnelle dans $\mathscr{L}^1$. On sait que toute fonctionnelle L dans $\mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$ admet la représentation suivante:

$$L(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \theta(e^{i\lambda}) A(e^{i\lambda})\, d\lambda, \qquad A \in \mathscr{L}^\infty, \ \|L\| = \|A\|^{(\infty)}.$$

La condition $l^*(\theta) = 0$ pour tous les $\theta \in \mathscr{H}^1$ équivaut à ce que pour la fonction $A \in \mathscr{L}^\infty(-\pi, \pi)$, déterminant la fonctionnelle l^*, on ait :

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\lambda}) e^{in\lambda} d\lambda = l^*(e^{in\lambda}) = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Ces égalités sont à leur tour équivalentes à $A \in \mathscr{H}^\infty$ et $A(0) = 0$. D'où et en vertu de (5.1.7), on a

$$\rho(\tau) = \inf_{l^*} \| l - l^* \| = \inf_{A \in \mathscr{H}^\infty,\ A(0)=0} \left\| \frac{\bar{g}}{g} e^{i\tau\lambda} - A \right\|^\infty .$$

Le lemme se trouve ainsi démontré. On peut presque immédiatement en déduire le lemme suivant.

L e m m e 2. *Pour qu'un processus aléatoire $\xi(t)$ soit complètement régulier il faut et il suffit que, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on puisse trouver une fonction $A \in \mathscr{H}^\infty$ telle que l'on ait simultanément*

$$-\varepsilon < \ln |A| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \arg(Ag^2 e^{-i\tau\lambda}) < \varepsilon \pmod{2\pi}. \qquad (5.2.6)$$

En effet, $\bar{g}/g = \exp\{-i \arg(g^2)\}$. Donc (5.2.5) peut s'écrire comme suit :

$$\rho(\tau) = \inf_A \| 1 - e^{\ln|A|} \exp\{-i \arg(Ag^2 e^{-i\tau\lambda})\} \|^\infty,$$

d'où, vu que $\rho(\tau) \to 0$ on déduit (5.2.6).

Nous aurons besoin d'un lemme de plus sur les prolongements analytiques; la démonstration du théorème de Helson et Sarasan est justement basée sur ce lemme ainsi que sur le principe de dualité.

L e m m e 3. *Soit la fonction $S(z)$ analytique à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, à l'exception du point $z = 0$, où elle peut avoir un pôle d'ordre τ. Si $z^\tau S(z) \in \mathscr{H}^{1/2}$ et si sur la circonférence $|z| = 1$ la fonction S est réelle et non négative, elle est analytiquement prolongeable au-delà de $|z| = 1$ dans $|z| > 1$, le prolongement étant un polynôme en z et $1/z$.*

Nous donnerons la démonstration de ce lemme à la fin du paragraphe, pour le moment nous supposerons le lemme démontré et terminerons la démonstration du théorème 3.

En utilisant (5.2.6), choisissons la fonction $s(e^{i\lambda}) \in \mathscr{L}^\infty$ telle que

$$|s| \leqslant \varepsilon, \ \arg(Ag^2 e^{-i\tau\lambda}) + s \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Considérons la fonction

$$S(z) = A(z)\, g^2(z)\, z^{-\tau} e^{(is - \widetilde{s})(z)}.$$

Il est évident que la fonction $z^\tau S(z)$ est analytique dans $|z| < 1$; sur $|z| = 1$ on a

$$S(e^{i\lambda}) = |A(\lambda)|\, e^{-\widetilde{s}(e^{i\lambda})} f(\lambda) \geqslant 0. \qquad (5.2.7)$$

On sait que les restrictions imposées sur la croissance d'une fonction $s(\lambda)$ entraînent les restrictions correspondant à la croissance de la fonction conjuguée $\tilde{s}$. En particulier il découle de l'inégalité $|s| \leqslant \varepsilon$ (voir [13], page 404) que $\exp\{k\,|\tilde{s}|\} \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$ pour tous les $k < \frac{\pi}{2\varepsilon}$; par conséquent pour $\varepsilon < 2/\pi$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{i\lambda})|^{1/2}\, d\lambda < \sqrt{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{|\tilde{s}(e^{i\lambda})|}\, d\lambda\right)^{1/2} < \infty.$$

Ainsi, la fonction $S(z)$ satisfait à toutes les conditions du lemme 3, donc c'est un polynôme en z et $1/z$.

Remarquons ensuite que sur la circonférence $|z| = 1$ la fonction $S(z)$ est un polynôme trigonométrique non négatif. En vertu du théorème de Fejér-Riesz un polynôme trigonométrique non négatif est le carré du module d'un polynôme en $e^{i\lambda}$ (voir [11], page 33). Donc

$$S(e^{i\lambda}) = |P_1(e^{i\lambda})|^2,$$

où $P_1(z)$ est un polynôme. Ecrivons P_1 sous la forme $P_1 = P \cdot Q$, en entendant par P et Q des polynômes ayant leurs racines l'un à l'extérieur de $|z| = 1$ et l'autre sur $|z| = 1$. En utilisant (5.2.7), on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= S(e^{i\lambda})\, |A|^{-1} e^{\tilde{s}} = \\ &= |P(e^{i\lambda})|^2 \exp\{\ln |Q|^2 - \ln |A| + \tilde{s}\} = \\ &= |P|^2 \exp\{r_\varepsilon + u_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon\}, \end{aligned} \qquad (5.2.8)$$

où 1) $r_\varepsilon = \ln |Q|^2$ est une fonction continue ; 2) $u_\varepsilon = -\ln |A|$ et $\| u_\varepsilon \|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon$; 3) $v_\varepsilon = s$ et par définition de s on a $\| v_\varepsilon \|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon$.

Pour achever la démonstration du théorème, il ne nous reste plus qu'à vérifier que le polynôme P ne dépend pas de ε. Posons

$$f(\lambda) = |P'|^2 \exp\{r_{\varepsilon'} + u_{\varepsilon'} + v_{\varepsilon'}\}. \qquad (5.2.9)$$

Montrons que les polynômes P et P' sont égaux à un facteur constant près. Ci-dessus nous avons déjà noté que $e^{|\tilde{v}_\varepsilon|} \in \mathscr{L}^1$, $e^{|\tilde{v}_{\varepsilon'}|} \in \mathscr{L}^1$. Donc toutes les fonctions $\left(\frac{f}{|P|^2}\right)^{\pm 1}$, $\left(\frac{f}{|P'|^2}\right)^{\pm 1}$ sont sommables. En vertu de l'inégalité de Shwartz on a

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P}{P'}\right| d\lambda \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P|^2}{f}\, d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f}{|P'|^2}\, d\lambda\right)^{1/2} < \infty, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P'}{P}\right| d\lambda \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P'|^2}{f}\, d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f}{|P|^2}\, d\lambda\right)^{1/2} < \infty. \end{aligned} \qquad (5.2.10)$$

Les inégalités (5.2.10) signifient que les polynômes P et P' sont multiples l'un de l'autre, les racines des deux polynômes se trouvant sur $|z| = 1$, et par conséquent $P/P' = \text{const}$.

Le théorème 3 se trouve ainsi démontré; il ne nous reste plus qu'à vérifier le lemme 3.

La fonction $z^\tau S \in \mathscr{H}^{1/2}$ peut s'écrire sous la forme d'un produit, soit $z^\tau S = b\theta_1\theta_2$, où b est le produit de Blaschke, θ_1 une fonction intérieure analytique dans $|z| < 1$, θ_2 une fonction extérieure dans $|z| < 1$. Sur $|z| = 1$ on a $|b| = |\theta_1| = 1$ et $\theta_2^{1/2} \in \mathscr{H}^1$. Donc, posant $S_1 = z^{-\tau}b\theta_1\theta_2^{1/2}$, $S_2 = \theta_2^{1/2}$, on peut écrire S sous la forme du produit S_1S_2, où $z^\tau S_1$, $S_2 \in \mathscr{H}^1$ et pour $|z| = 1$ on a $|S_1| = |S_2|$. D'où, S étant réel sur la circonférence $|z| = 1$, on a $S_1 = \overline{S_2}$ (sur $|z| = 1$). Par conséquent, sur $|z| = 1$ les fonctions $S_1 + S_2$ et $i(S_1 - S_2)$ sont réelles; elles sont sommables sur $|z| = 1$ et en vertu du principe de symétrie ont un prolongement analytique au-delà de $|z| = 1$ (les valeurs des prolongements pour $|z| > 1$ sont données par les égalités $(S_1 + S_2)(z) = \overline{(S_1 + S_2)(\bar{z}^{-1})}$, $i(S_1 - S_2)(z) = \overline{i(S_1 - S_2)(\bar{z}^{-1})}$ *). Mais alors les fonctions S_1, S_2 (et donc $S = S_1S_2$) ont des prolongements analytiques à l'extérieur de $|z| = 1$. La méthode même des prolongements suppose que la fonction prolongée S est analytique partout, sauf peut-être aux points $z = 0$, $z = \infty$, où elle peut avoir des pôles d'ordre non supérieur à τ. En vertu du théorème de Liouville $S(z)$ est obligatoirement un polynôme en z et $1/z$. Ce qui achève la démonstration du lemme 3, et par là même du théorème 3.

On peut tirer du théorème démontré un certain nombre de conséquences simples donnant une image suggestive de la structure des densités spectrales des processus complètement réguliers. Nous démontrerons ces conséquences dans le § 5.

La méthode exposée ici permet également de décrire entièrement la classe de processus aléatoires pour lesquels $\rho(1) < 1$ (mais pas forcément $\rho(\tau) \to 0$).

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'inégalité $\rho(1) < 1$ est également une condition de régularité, beaucoup plus forte que la régularité linéaire, et signifiant, du point de vue géométrique, que l'angle minimal entre les sous-espaces L^+, $e^{i\lambda}L^-$ est positif. Ci-dessous nous obtiendrons un résultat plus fort **) en donnant les condi-

*) Pour démontrer que le prolongement des fonctions est analytique au voisinage de la circonférence $|z| = 1$, il y a lieu d'utiliser l'égalité

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_\alpha^\beta \gamma(re^{i\lambda})\, d\lambda = \int_\alpha^\beta \gamma(e^{i\lambda})\, d\lambda,$$

vraie pour toutes les fonctions $\gamma \in \mathscr{H}^1$.

**) Pour $k = 1$ ce résultat a été établi par H. Helson, G. Szegö (*A problem in prediction theory*. Ann. Math. Pure Appl. 51 (1960), 107-138) et pour $k > 1$ par H. Helson et Sarasan (voir renvoi à la page 176).

tions pour lesquelles $\rho(\tau) < 1$ pour la première fois pour $\tau = k$.

Théorème 4. *Les relations*

$$\rho(k-1) = 1, \quad \rho(k) < 1$$

sont vraies pour un processus stationnaire $\xi(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, *si et seulement si sa densité spectrale* $f(\lambda)$ *puisse s'écrire sous la forme*

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 e^{u+\widetilde{v}(\lambda)},$$

où $P(z)$ *est un polynôme de degré* $k-1$ *à racines sur* $|z| = 1$, *et* $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ *sont des fonctions bornées réelles, avec* $\|v\|^{(\infty)} < \pi/2$.

Montrons d'abord que les conditions mentionnées sont suffisantes. En vertu de (5.1.10)

$$\rho(k; f) \leqslant \rho(1; e^{u+\widetilde{v}}),$$

on peut donc se limiter à l'étude du cas où $P \equiv 1$. Il est évident que $\ln f = u + \widetilde{v} \in \mathscr{L}^1$ de sorte que $f(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$ avec $g \in \mathscr{H}^2$. Soit $A(z)$ une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^\infty$ telle que $|A(e^{i\lambda})| = e^{-u}$. Construisons la fonction $\psi = e^{\widetilde{v}-iv}$. C'est une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^1$ car, comme nous l'avons déjà noté, $e^{\widetilde{v}} \in \mathscr{L}^1$ si seulement $|v| < \pi/2$. Sur $|z| = 1$ on a l'égalité $|\psi| = |Ag^2|$. Comme les fonctions extérieures de modules égaux sur $|z| = 1$ ne diffèrent que par un facteur constant, on peut poser $\psi = Ag^2$.

Prenons un nombre positif γ tel que $\gamma |A| \leqslant 1$. Les valeurs de la fonction $\zeta = \gamma e^{-u} e^{-iv}$ pour tous les λ se trouvent dans le domaine $\mathfrak{A} = \{0 < \gamma \inf_\lambda e^{-u} \leqslant |\zeta| \leqslant 1, \quad |\arg \zeta| < \sup_\lambda |v| < \pi/2\}$. Il est facile de trouver que $\rho_1 = \inf_{\zeta \in \mathfrak{A}} |1 - \zeta| < 1$. En vertu de (5.2.5) on a alors

$$\rho(1) \leqslant \left\| \frac{\bar{g}}{g} - \gamma A \right\|^{(\infty)} = \| 1 - \gamma e^{\ln|A|} \exp\{-i \arg(Ag^2)\} \|^{(\infty)} = \\ = \| 1 - \gamma e^{-u} e^{-iv} \|^{(\infty)} \leqslant \rho_1 < 1.$$

Nous avons ainsi démontré que les conditions du théorème sont suffisantes ; il nous reste à démontrer qu'elles sont nécessaires.

Rappelons que l'inégalité $\rho(k) < 1$ entraîne la régularité du processus $\xi(t)$. Pour cette raison la densité spectrale f est factoriable : $f = |g|^2$, $g \in \mathscr{H}^2$, et $\rho(k)$ se calcule par la formule (5.2.5). En utilisant cette formule, on trouve, tout comme pour le lemme 2, que si $\rho(k) < 1$, on peut toujours trouver une fonction $A \in \mathscr{H}^\infty$ telle que

$$|A| \geqslant \varepsilon, \quad |\arg(Ag^2 e^{-i(k-1)\lambda}| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

(la seconde inégalité est vraie en module 2π).

Définissons la fonction v, $|v| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, de telle sorte que

$$v + \arg(Ag^2 e^{-i(k-1)\lambda}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

La fonction

$$S(z) = Ag^2 z^{-(k-1)} e^{-\tilde{v} + iv}$$

est analytique dans $|z| < 1$ à l'exception du pôle d'ordre $k - 1$ au point $z = 0$. En répétant les raisonnements de la page 179 nous obtenons que $Sz^{k-1} \in \mathscr{H}^{1/2}$ et que $S = |P|^2$, où P est un polynôme de degré non supérieur à $k - 1$. Enfin, posant $u = -\ln |A|$ on trouve

$$f = |P|^2 e^{u + \tilde{v}}.$$

Il reste à montrer que le degré N du polynôme P, qui n'est pas supérieur à $k - 1$, est en réalité égal à $k - 1$. On a déjà démontré que $\rho(1; e^{u+\tilde{v}}) < 1$. Donc si $N < k - 1$ on aurait

$$\rho(k-1;\ f) \leqslant \rho(k-1-N;\ e^{u+\tilde{v}}) \leqslant \rho(1;\ e^{u+\tilde{v}}) < 1,$$

contrairement à $\rho(k-1; f) = 1$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

§ 3. Seconde méthode d'étude. Conditions locales

Dans ce paragraphe et dans le suivant nous exposerons une nouvelle méthode d'étude des suites complètement régulières. A la différence de celles du § 2, cette méthode est purement réelle et impose des conditions locales à $f(\lambda)$. Cependant il y a une certaine divergence entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes dans la forme locale dont il est question.

Théorème 5. *Pour qu'une fonction $f(\lambda)$ positive, sommable sur $[-\pi, \pi]$ soit la densité spectrale d'une suite stationnaire complètement régulière, il faut qu'elle admette la représentation*

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda), \tag{5.3.1}$$

où $P(z)$ est un polynôme à racines sur $|z| = 1$, et la primitive $W(\lambda)$ de la fonction $w(\lambda)$ satisfait à la condition

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_W(\delta) = 0, \tag{5.3.2}$$

où

$$\omega_W(\delta) = \sup_{\lambda} \sup_{|x| \leqslant \delta} \frac{|W(\lambda + x) + W(\lambda - x) - 2W(\lambda)|}{|W(\lambda + x) - W(\lambda - x)|}.$$

L'une des inversions les plus simples de ce théorème s'énonce comme suit.

Théorème 6. *Supposons que la densité spectrale* $f(\lambda)$ *de la suite* $\xi(t)$ *admette la représentation* (5.3.1), *où* $P(z)$ *est un polynôme de degré* k *et la fonction* $w(\lambda)$ *est douée des propriétés suivantes*:

1) $\sum\limits_n w_W^2(2^{-n}) < \infty$;

2) $0 < m \leqslant w(\lambda) \leqslant M < \infty$.

La suite $\xi(t)$ *est alors complètement régulière avec*

$$\rho(\tau) \leqslant 40\left(\frac{M}{m}\right)^{5/2}\left(\sum_1^\infty \omega_W^2\left(\frac{1}{2^{n-1}(\tau-k)-1}\right)\right)^{1/2}. \qquad (5.3.3)$$

La démonstration du théorème 5 est assez compliquée. Elle est basée sur l'analyse*) des fonctions

$$\gamma(N;\ \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 N\frac{\lambda-\mu}{2}}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Dans le paragraphe suivant, en utilisant les résultats de l'analyse, nous démontrerons le théorème 5 ainsi que le théorème 6.

Passant à l'étude de $\gamma(N;\ \mu)$ notons tout d'abord que

$$\gamma(N;\ \mu) = \mathbf{M}\left|\sum_0^{N-1} e^{i\mu t}\xi(t)\right|^2. \qquad (5.3.4)$$

Si la représentation spectrale de la suite $\xi(t)$ est

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\Phi(d\lambda),$$

où $\Phi(d\lambda)$ est une mesure orthogonale aléatoire, $\mathbf{M}|\Phi(d\lambda)|^2 = f(\lambda)\,d\lambda$ on a alors

$$\mathbf{M}\left|\sum_0^{N-1} e^{i\mu t}\xi(t)\right|^2 = \mathbf{M}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iN(\lambda-\mu)}-1}{e^{i(\lambda-\mu)}-1}\Phi(d\lambda)\right|^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 N\frac{\lambda-\mu}{2}}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Lemme 4. *Pour* $N \to \infty$ *la grandeur*

$$\gamma(N;\ 0) = \gamma(N) = \mathbf{M}\left|\sum_1^N \xi(t)\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{N\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} f(\lambda)\,d\lambda$$

*) Notre analyse de la fonction $\gamma(N;\ \mu)$ suit en de nombreux points l'article de V. Leonov, *Sur la variance des moyennes temporelles des processus aléatoires stationnaires* (en russe). Teoria veroiatnostei i eïe primenenia, VI, nº 1 (1961), 93-101.

tend vers l'infini ou est bornée. Pour qu'elle soit bornée il faut et il suffit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\lambda}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} d\lambda < \infty. \tag{5.3.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit U un opérateur unitaire dans l'espace $H = H(-\infty, \infty)$ correspondant à la suite $\xi(t)$: $U(t) = \xi(t+1)$. Considérons les sommes $S_N = \sum_0^{N-1} \xi(t)$ en tant qu'éléments de l'espace H. L'assertion $\varliminf_N \mathrm{M} \mid S_N \mid^2 < \infty$ signifie que pour une certaine suite on a $N_j \| S_{N_j} \| = \mathrm{M}^{1/2} \mid S_{N_j} \mid^2 < C < \infty$. La sphère dans l'espace hilbertien H étant faiblement compacte on peut extraire de $\{N_j\}$ une suite $\{n_k\}$ telle que S_{n_k} converge faiblement vers un certain élément $-\eta \in H$, c'est-à-dire que pour tous les $\zeta \in H$ on a

$$\lim_{n_k} (S_{n_k}, \zeta) = \lim_{n_k} \mathrm{M} S_{n_k} \bar{\zeta} = -(\eta, \zeta) = -\mathrm{M}\eta\bar{\zeta}.$$

Mais alors

$$\lim_{n_k} (US_{n_k}, \zeta) = -(U\eta, \zeta),$$

et par conséquent pour tous les $\xi \in H$

$$(U\eta - \eta, \zeta) = \lim_{n_k} (S_{n_k} - US_{n_k}, \zeta) =$$
$$= (\xi(0), \zeta) - \lim_{n_k} (\xi(n_k), \zeta) = \mathrm{M}\xi(0)\bar{\zeta} - \lim_{n_k} \mathrm{M}\xi(n_k)\bar{\zeta}.$$

Vu l'isométrie existant entre H et $L(f)$, à la variable aléatoire ζ correspond la fonction $\varphi \in L(f)$ telle que

$$\mathrm{M}\xi(n_k)\bar{\xi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n_k} \overline{\varphi(\lambda)} f(\lambda) \, d\lambda. \tag{5.3.6}$$

Il est évident que $\bar{\varphi} f \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$ et en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue l'intégrale dans (5.3.6) tend vers zéro lorsque $n_k \to \infty$. Donc si $\varliminf \gamma(N) < \infty$ pour tous les $\zeta \in H$ on a

$$\mathrm{M}(U\eta - \eta)\bar{\zeta} = \mathrm{M}\xi(0)\bar{\zeta},$$

et par conséquent

$$\xi(0) = U\eta - \eta = \eta(1) - \eta(0),$$

où $\eta(0) = \eta$, $\eta(k) = U^k\eta$. Mais dans ce cas $\xi(t) = \eta(t+1) - \eta(t)$, et pour N quelconque on a

$$S_N = \eta(N) - \eta(0),$$
$$\gamma(N) = \mathrm{M} \mid S_N \mid^2 = \mathrm{M} \mid \eta(N) - \eta(0) \mid^2 \leqslant 4\mathrm{M} \mid \eta \mid^2 < \infty.$$

Nous avons ainsi démontré qu'on a soit $\gamma(N) \to \infty$, soit $\sup\limits_N \gamma(N) < \infty$, la dernière inégalité ayant lieu seulement si $\xi(t)$ peut s'écrire comme la différence

$$\xi(t) = U^{t+1}\eta - U^t\eta = \eta(t+1) - \eta(t), \qquad \eta \in H. \tag{5.3.7}$$

Il découle évidemment de (5.3.7) que $\sup\limits_N \gamma(N) \leqslant 4\mathrm{M}\,|\,\eta\,|^2 < \infty$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que (5.3.7) équivaut à (5.3.5). Supposons que (5.3.7) soit satisfaite. Désignons par $f_\eta(\lambda)$ la densité spectrale de la suite $\eta(t)$. En vertu de (5.3.7) on a

$$f_\eta(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{|\,e^{i\lambda} - 1\,|^2} = \frac{f(\lambda)}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}},$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda = 4\int_{-\pi}^{\pi} f_\eta(\lambda)\,d\lambda < \infty.$$

Inversement, si l'intégrale (5.3.5) est finie, par définition de $\gamma(N)$ on a

$$\gamma(N) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda < \infty.$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

L e m m e 5. *Quel que soit μ, lorsque $N \to \infty$, la fonction $\gamma(N, \mu)$ tend vers l'infini ou elle est bornée. Pour que cette fonction soit bornée il faut et il suffit que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}}\,d\lambda < \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. En écrivant la fonction $\gamma(N;\mu)$ sous la forme

$$\gamma(N;\ \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{N\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda,$$

on voit que $\gamma(N;\mu)$ coïncide avec l'expression $\mathrm{M}\left|\sum\limits_1^n \xi'(t)\right|^2$, où la suite $\{\xi'(t)\}$ stationnaire au sens général, a pour densité spectrale $f(\lambda+\mu)$. Le reste découle du lemme 4.

L e m m e 6. *Pour* $N \to \infty$ *soit* $\inf_{\mu} \gamma(N, \mu) \to \infty$, *soit il existe un point* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *tel que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{\sin^2 \frac{\lambda-\theta}{2}} d\lambda < \infty.$$

La d é m o n s t r a t i o n diffère peu de celle du lemme 4. Supposons que $\varliminf_{N} \inf_{\mu} \gamma(N, \mu) < \infty$. On peut alors séparer une suite N_k et une suite convergente $\{\theta_k\}$ de points dans $[-\pi, \pi]$ ayant pour limite θ, de telle sorte que

$$\lim_k \gamma(N_k;\ \theta_k) < \infty.$$

Posons $S_k = \sum_{0}^{N_k-1} e^{it\theta_k}\xi(t)$, on arrive par des raisonnements analogues à ceux qui ont servi à la démonstration du lemme 4, à la conclusion qu'il existe un élément limite $\eta \in H$ tel que pour tous les $\zeta \in H$ on ait

$$\lim_k \mathbf{M} S_k \bar{\zeta} = \mathbf{M}\eta\bar{\zeta},$$

$$\lim_k \mathbf{M} e^{-i\theta_k} U S_k \bar{\zeta} = e^{-i\theta} \mathbf{M} U S_k \bar{\zeta}.$$

Comme précédemment, on en déduit la représentation suivante:

$$\xi(t) = \eta(t) - e^{-i\theta}\eta(t+1)$$

dont on tire l'assertion du lemme.

L e m m e 7. *La densité spectrale* $f(\lambda)$ *d'une suite* $\{\xi(t)\}$ *satisfaisant à la condition de régularité complète s'écrit sous la forme*

$$f(\lambda) = w(\lambda)\,|P(e^{i\lambda})|^2, \tag{5.3.8}$$

où $P(z)$ *est un polynôme à racines sur* $|z| = 1$, *et* $w(\lambda)$ *jouit de la propriété*

$$\lim_N \inf_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 N \frac{\lambda-\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}} w(\lambda)\, d\lambda = \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\sigma^2(n) = \min \mathbf{M}\,|\xi(0) - \eta_n|^2, \tag{5.3.9}$$

où le minimum est pris sur tous les $\eta_n \in H(|t| > n)$. Désignons par η_n^* une variable aléatoire de $H(|t| > n)$ donnant le minimum dans

(5.3.9). Il est évident que

$$\mathbf{M} \mid \xi(0) \mid^2 + \mathbf{M} \mid \eta_n^* \mid^2 - \\ -2\sqrt{2}\rho(n)\, \mathbf{M}^{1/2} \mid \xi(0) \mid^2 \mathbf{M}^{1/2} \mid \eta_n^* \mid^2 \leqslant \\ \leqslant \sigma^2(n) \leqslant \mathbf{M} \mid \xi(0) \mid^2. \quad (5.3.10)$$

Donc pour des n grands on a

$$\sigma^2(n) \geqslant \frac{1}{2} \mathbf{M} \mid \xi(0) \mid^2 > 0, \quad (5.3.11)$$

c'est-à-dire que le processus $\xi(t)$ n'est pas « interpolable », on en déduit *) qu'il existe un polynôme $Q(z)$ tel que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|Q(e^{i\lambda})|^2}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty. \quad (5.3.12)$$

Désignons par $Q_0(z)$ celui des polynômes $Q(z)$, satisfaisant à (5.3.12), dont le degré est minimal et le coefficient du terme supérieur est égal à 1. L'inégalité (5.3.12) signifie également que parmi tous les polynômes $Q(z)$ à racines réelles pour lesquels $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{|Q(e^{i\lambda})|^2} d\lambda < \infty$ il existe un $P(z)$, dont la puissance est maximale (finie). En effet, en vertu de l'inégalité

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{Q_0(e^{i\lambda})}{P(e^{i\lambda})} \right|^2 d\lambda \right)^2 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|Q_0(e^{i\lambda})|^2}{f(e^{i\lambda})} d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\lambda})}{|P(e^{i\lambda})|^2} d\lambda < \infty$$

le polynôme Q_0 est divisible par P.

Posons maintenant $f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda)$ et supposons que

$$\varliminf_{N} \inf_{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 N \frac{\lambda - \mu}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda - \mu}{2}} w(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Selon le lemme 6 on peut alors trouver un point $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lequel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{w(\lambda)}{|1 - e^{i(\lambda - \theta)}|^2} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{|P(e^{i\lambda})(1 - e^{i(\lambda - \theta)}|^2} < \infty.$$

La dernière inégalité est de toute évidence en contradiction avec le fait que le polynôme $P(z)$ est maximal. Le lemme se trouve ainsi démontré.

---

*) Voir, par exemple, [22], page 142.

L e m m e 8. *Si $f(\lambda)$ est la densité spectrale de la suite $\{\xi(t)\}$ satisfaisant à la condition de régularité complète aux points* μ, *où* $\lim \gamma(N;\mu)=\infty$, *la fonction* $\gamma(N;\mu)$ *admet la représentation* $\gamma(N;\mu)=Nh(N;\mu)$, *où* $h(N;\mu)$ *est une fonction de N variant lentement (au sens de Karamata), c'est-à-dire que pour tous les* $k>0$ *entiers on a*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{h(kN;\mu)}{h(N;\mu)}=1.$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour simplifier l'écriture posons

$$\gamma(N;\mu)=\gamma(N),\qquad h(N;\mu)=h(N).$$

Soient ensuite

$$z_j=\sum_{s=1}^{N}\xi[(j-1)N+(j-1)r+s]\times$$
$$\times\exp\{-i\mu[(j-1)N+(j-1)r+s]\},$$
$$j=1,\ldots,k;$$

$$y_j=\sum_{s=1}^{r}\xi[jN+(j-1)r+s]\exp\{-i\mu[jN+(j-1)r+s]\},\quad(5.3.13)$$
$$j=1,\ldots,k-1;$$
$$y_k=-\sum_{s=1}^{(k-1)r}\xi(Nk+s)\exp\{-i\mu(Nk+s)\},$$

où $r=r(N)\to\infty$ pour $N\to\infty$ mais suffisamment lentement pour que $\frac{\gamma(r)}{\gamma(N)}\to 0$, $\frac{\gamma((k-1)r)}{\gamma(N)}\to 0$. On a alors

$$\gamma(N)=\mathrm{M}\,|z_1+y_1+\ldots+z_k+y_k|^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{M}\,|z_j|^2+\sum_{i,j}(\mathrm{M}z_i\bar{y}_j+\mathrm{M}\bar{z}_iy_j)+$$
$$+\sum_{i\neq j}\mathrm{M}z_i\bar{z}_j+\sum_{i,j}\mathrm{M}y_i\bar{y}_j.\quad(5.3.14)$$

La première somme dans le second membre de (5.3.14) est en raison de la stationnarité égale à $k\gamma(N)$, la seconde et la quatrième ne surpasseront pas $k^2(\gamma(N)\gamma(r))^{1/2}=o(\gamma(N))$, enfin la troisième somme, vu la condition de régularité complète, ne sera pas supérieure à $k^2\gamma(N)\rho(r)=o(\gamma(N))$. Ainsi $\gamma(kN)=k\gamma(N)(1+o(1))$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous montrerons ci-dessous que la fonction $h(N)$ peut être prolongée des nombres entiers sur les nombres positifs, tout en conservant la propriété de variation lente. Pour des fonctions quelconques à variation lente de l'argument naturel, un tel prolongement n'est

en général pas possible. Quant à la fonction $h(N)$, nous allons tout d'abord signaler les propriétés rendant ce prolongement possible. Nous considérerons le cas $\mu = 0$; celui de $\mu \neq 0$ peut être étudié d'une manière analogue, il suffit de remplacer partout $\xi(t)$ par $\xi(t)\, e^{-i\mu t}$.

1) *Pour k donné et $N \to \infty$ on a* $\lim \frac{h(N+k)}{h(N)} = 1$.

En effet, comme $\gamma(N) \to \infty$ pour $N \to \infty$, on a

$$\gamma(N+k) = \gamma(N) + \gamma(k) + \\ + 2M(\xi(1) + \ldots + \xi(N))(\bar{\xi}(N+1) + \ldots + \bar{\xi}(N+k)), \quad (5.3.15)$$

$$|(\xi(1) + \ldots + \xi(N))(\bar{\xi}(N+1) + \ldots + \bar{\xi}(N+k))| \leqslant (\gamma(N)\gamma(k))^{1/2}$$

et

$$\frac{\gamma(N+k)}{\gamma(N)} = \frac{N+k}{N}\frac{h(N+k)}{h(N)} = 1 + o(1), \quad (5.3.16)$$

$$\frac{h(N+k)}{h(N)} = 1 + o(1).$$

2. *Pour $\varepsilon > 0$ quelconque on a* $\lim_{N\to\infty} N^{\varepsilon} h(N) = \infty$, $\lim_{N\to\infty} N^{-\varepsilon} h(N) = 0$.

En effet, en utilisant la relation $h(2N) \sim h(N)$ et la propriété précédente, on a

$$\ln h(N) = \sum_j \ln \frac{h\left(\left[\frac{N}{2^j}\right]\right)}{h\left(\left[\frac{N}{2^{j+1}}\right]\right)} = o(\ln N).$$

3. *Si $r \leqslant p \leqslant 2r$ pour des r suffisamment grands, on a*

$$\sup_p \frac{h(p)}{h(r)} \leqslant 4.$$

Fixons m suffisamment grand pour que $\rho(m) < 1/16$. Supposons que $p > 3r/2$ (le cas $p \leqslant 3r/2$ peut être étudié d'une manière analogue). La relation

$$\sum_1^{p+m} \xi(t) = \sum_1^{r} \xi(t) + \sum_{r+1}^{r+m} \xi(t) + \sum_{r+m+1}^{p+m} \xi(t)$$

permet d'écrire

$$(p+m)\, h(p+m) = rh(r) + (p-r)\, h(p-r) + \theta,$$

où

$$|\theta| \leqslant 2\,[\rho(m)\,(r(p-r)\,h(r)\,h(p-r))^{1/2} + (rmh(r)\,h(m))^{1/2} + \\ + ((p-r)\,mh(m)\,h(p-r))^{1/2}] + mh(m).$$

Il est évident que

$$2\,(r(p-r)\,h(r)\,h(p-r))^{1/2} \leqslant rh(r) + (p-r)\,h(p-r).$$

Donc pour des r grands on a $h(p+m) = \theta_1 h(r) + \theta_2 h(p-r) +$

$+R_p$, où $R_p = O(p^{-1/4})$, $\theta_1 > 15/32$, $\theta_2 > 0$ et par conséquent (voir la propriété précédente) on a

$$\theta_1 \frac{h(r)}{h(r+m)} < \frac{3}{2}, \qquad \theta_1 \frac{h(r)}{h(p)} < \frac{4}{3},$$

$$\frac{h(r)}{h(p)} < 4.$$

4. *Pour tous les c suffisamment petits et des N suffisamment grands on a* $h(cN)/h(N) < c^{-1/2}$.

Bien entendu, on ne tient compte que des N pour lesquels cN est un entier. Utilisant les propriétés 1 ou 2 on a

$$\ln \frac{h(cN)}{h(N)} \sum_{k=0}^{\left[-\frac{\ln c}{\ln 2}\right]} \left(\ln h\left(\left[\frac{N}{2^{k+1}}\right]\right) - \ln h\left(\left[\frac{N}{2^k}\right]\right)\right) +$$

$$+\ln h(cN) - \ln h\left(\left[\frac{N}{2^{\left[-\frac{\ln c}{\ln 2}\right]}}\right]\right) < \frac{1}{2}\ln|c| = -\frac{1}{2}\ln c. \qquad (5.3.17)$$

Notons que l'inégalité démontrée est uniformément satisfaite pour tous les c, $c < c_0$ suffisamment petits.

Généralisons maintenant les fonctions $\gamma(N)$, $h(N)$ à tous les x positifs, posons que

$$\gamma(x;\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\, d\lambda, \qquad (5.3.18)$$

$$h(x;\mu) = \frac{1}{x}\gamma(x;\mu).$$

L e m m e 9. *Pour tous les* μ *pour lesquels* $\gamma(N) \to \infty$ *la fonction* $h(x)$ *est une fonction lentement variable, c'est-à-dire que pour tous les* $y > 0$ *on a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(xy)}{h(x)} = 1. \qquad (5.3.19)$$

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons (5.3.19) d'abord pour des y rationnels. Il est clair que pour $x \to \infty$ on a

$$\gamma(x) = \gamma([x])\,(1 + o(1)). \qquad (5.3.20)$$

Donc pour $y = k$, où k est un entier, vu la propriété 1 des fonctions $h(N)$, on a

$$\frac{\gamma(kx)}{\gamma(x)} = \frac{[kx]}{[x]} \frac{h([kx])}{h([t])} (1+o(1)) = k(1+o(1)). \qquad (5.3.21)$$

Si $y=p/q$, où p, q sont des nombres entiers, compte tenu de (5.3.21) on trouve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\gamma\left(\frac{p}{q}x\right)}{\gamma(x)}=\lim\frac{\gamma\left(p\frac{x}{q}\right)}{\gamma\left(\frac{x}{q}\right)}\frac{\gamma\left(\frac{x}{q}\right)}{\gamma\left(q\frac{x}{q}\right)}=\frac{p}{q}. \qquad (5.3.22)$$

Soit maintenant y un nombre réel quelconque. Posons

$$\psi_1(y)=\varliminf_{x\to\infty}\frac{\gamma(x,y)}{\gamma(x)},\qquad \psi_2(y)=\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\gamma(x,y)}{\gamma(x)}.$$

Pour des y rationnels on a $\psi_1(y)=\psi_2(y)=y$, il nous suffit donc de montrer que les fonctions $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ sont continues. Comme

$$\frac{|\gamma((y+\varepsilon)x)-\gamma(yx)|}{\gamma(x)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\gamma(x)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{\varepsilon x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\gamma(x)}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\varepsilon x\lambda\sin yx\lambda}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\gamma(\varepsilon x)}{\gamma(x)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(yx)}{\gamma(x)}\right)^{1/2}\left(\frac{\gamma(\varepsilon x)}{\gamma(x)}\right)^{1/2}, \qquad (5.3.23)$$

il suffit de montrer que $\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$ sont continues à zéro. Compte tenu de la propriété 3 des fonctions $h(N)$ on a

$$\frac{\gamma(\varepsilon x)}{\gamma(x)}=\frac{[\varepsilon x]}{[x]}\frac{h\left(\frac{[\varepsilon x]}{[x]}[x]\right)}{h([x])}(1+o(1))\leqslant\varepsilon^{1/2}(1+o(1)). \qquad (5.3.24)$$

A partir de (5.3.23), (5.3.24), on a

$$|\psi_1(y+\varepsilon)-\psi_1(y)|=O(\varepsilon^{1/4}),\qquad |\psi_2(y+\varepsilon)-\psi_2(y)|=O(\varepsilon^{1/4}).$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Lemme 10. *Si* $\gamma_0(N)=\inf_{\mu}\gamma(N;\mu)\xrightarrow[N\to\infty]{}\infty$, *la relation*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(xy)}{h(x)}=1$$

est uniformément satisfaite pour tous les μ *et* y *tels que* $0<y_0<$ $<y<y_1<\infty$.

Démonstration. Soit $\frac{h(xy)}{h(x)}=1+R(\mu;\ y;\ x)$. Supposons tout d'abord que $x=N$, $y=k$ sont des nombres entiers. D'après

le lemme 8 on a

$$R(\mu;\ k;\ N)=O\left[k\rho(r)+k\left(\frac{\gamma(r;\ \mu)}{\gamma_0(N)}\right)^{1/2}+k\left(\frac{\gamma((k-1)r;\ \mu}{\gamma_0(N)}\right)^{1/2}\right].$$

Pour tous les μ on a $\gamma(N;\ \mu)<N^2\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\,d\lambda$, donc, en posant $r=\ln\gamma_0(N)$, on obtient

$$R(\mu;\ k;\ N)=O\left[k\rho\ (r)+\left(\frac{\ln^2\gamma_0(N)}{\gamma_0(N)}\right)^{1/2}\right].$$

En vertu de la relation (5.3.16) on peur écrire

$$\frac{\gamma(N+k;\ \mu)}{\gamma(N;\ \mu)}=1+O\left(\frac{k^2}{\gamma_0(N)}\right).$$

Par conséquent, la relation

$$\ln h\ (N;\ \mu)=\sum\left(\ln h\left(\left[\frac{N}{2^{k-1}}\right];\ \mu\right)-\ln h\left(\left[\frac{N}{2^k}\right]\right);\ \mu\right)\right)+\\ +O(1)=o(\ln N)$$

est uniformément satisfaite en μ, et donc $\lim_N h\ (N;\ \mu)\ N^{-\varepsilon}=0$ l'est également. De ce qui vient d'être dit on tire facilement que les propriétés 3 et 4 des fonctions $h\ (N;\ \mu)$ et les égalités (5.3.20), (5.3.24) sont également uniformément satisfaites en μ.

Soit maintenant $y\in[y_0,\ y_1]$. Donnons-nous un q entier. La convergence vers 1, soit

$$\lim_x\frac{h\ (px/q)}{h\ (x)}=1,$$

est uniforme par rapport à μ et p tels que $y_0<p/q<y_1$. Soit y' le nombre de la forme p/q le plus voisin de y. On a alors en vertu de (5.3.23), (5.3.24) que

$$\left|\frac{\gamma(yx)}{\gamma(x)}-y\right|\leqslant\left|\frac{\gamma(y'x)}{\gamma(x)}-y'\right|+|y'-y|+\left|\frac{\gamma(yx)}{\gamma(x)}-\frac{\gamma(y'x)}{\gamma(x)}\right|\leqslant Cq^{-1/4}+o(1),$$

où la constante C et le terme o (1) ne dépendent pas de q. Le lemme se trouve donc démontré.

§ 4. Conditions locales (suite)

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème 5. On peut considérer ce théorème comme une proposition du type taubérien, où en se basant sur le comportement de la fonction

$$\gamma(N;\ \mu)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 N\dfrac{\lambda-\mu}{2}}{\sin^2\dfrac{\lambda}{2}}f(\lambda)\,d\lambda\quad \text{pour } N\to\infty$$

on juge du comportement de

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(\lambda+\mu)\,d\lambda \quad \text{pour } x \to 0.$$

Pour la démonstration de ce théorème sera utilisée la méthode de Karamata de démonstration des théorèmes du type taubérien.

Montrons préalablement que pour μ quelconque la fonction $\gamma(N;\mu)$ peut s'écrire sous la forme

$$\gamma(N;\mu) = N \cdot h(N;\mu),$$

où $h(N;\mu)$ est une fonction lentement variable. Ceci découle du lemme 7 et du lemme 11 qui suit.

L e m m e 11. *Si $f(\lambda)$ est la densité spectrale d'une suite $\{\xi(t)\}$ satisfaisant à la condition de régularité complète, toutes les racines du polynôme $P(z)$ sont en module égales à 1, et que la fonction $w(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{|P(e^{i\lambda})|^2}$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$, $w(\lambda)$ est alors la densité spectrale de la suite $\{\eta(t)\}$ satisfaisant également à la condition de régularité complète et $\rho(\tau;w) \leqslant \rho(\tau;f)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons les fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^2$. Si les racines du polynôme $P(z)$ se trouvent toutes sur la circonférence $|z| = 1$, pour tous les δ suffisamment petits on a $\varphi/P \in \mathscr{H}^\delta$, $\psi/\overline{P} \in \mathscr{H}^\delta$. Donc l'égalité (5.1.3) donne

$$\rho(\tau;w) = \sup_{\varphi,\psi}\left|\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}w(\lambda)\,d\lambda\right| =$$

$$= \sup_{\varphi,\psi}\left|\int_{-\tau}^{\tau}\frac{\varphi(\lambda)}{P(\lambda)}\,\frac{\psi(\lambda)}{\overline{P}(\lambda)}\,e^{i\lambda\tau}w(\lambda)\,|P(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi,\psi}\left|\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}f(\lambda)\,d\lambda\right| = \rho(\tau;f).$$

Dans la première intégrale le suprémum est pris sur tous les $\varphi, \psi \in L^+(w)$ avec $\|\varphi\|_w = \|\psi\|_w = 1$, et dans la dernière, sur tous les $\varphi, \psi \in L^+(f)$ avec $\|\varphi\|_f = \|\psi\|_f = 1$. Le lemme est démontré.

Ici et jusqu'à la démonstration du lemme 14 nous entendons par $f(\lambda)$ la densité spectrale d'une suite stationnaire $\{\xi(t)\}$ satisfaisant à la condition de régularité complète, le coefficient de régularité étant $\rho(\tau)$. De plus nous supposons $f(\lambda)$ telle que $\lim_N \inf_\mu \gamma(N;\mu) = \infty$.

L e m m e 12. *Soit* $a(\lambda)$ *une fonction paire à dérivée troisième bornée, qui s'annule à l'extérieur de l'intervalle* $[-1, 1]$. *Pour* $x \to \infty$ *on a uniformément en* μ

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}a(\lambda)\,d\lambda\cdot h(x)\,(1+o(1)). \qquad (5.4.1)$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $|a'''(\lambda)|\leqslant C<\infty$ et que

$$a(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos\lambda z A(z)\,dz,$$
$$A(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos\lambda z a(\lambda)\,d\lambda. \qquad (5.4.2)$$

$a(\lambda)$ étant lisse, on a $|A(z)|\leqslant\frac{C}{|z|^3+1}$. Pour un $\varepsilon>0$ donné on prend les nombres s et δ tels que

$$\int_s^\infty|A(z)|\,dz+\int_{|1-z|\leqslant\delta}|A(z)|\,dz+\int_0^\delta|A(z)|\,dz<\varepsilon. \qquad (5.4.3)$$

Posons $B=\{z\colon\ \delta\leqslant z\leqslant s,\ |1-z|>\delta\}$. On a alors

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,d\lambda\int_0^\infty\cos x\lambda z\cdot A(z)\,dz=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_B A(z)\,dz\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\cos x\lambda z\cdot f(\lambda+\mu)\,d\lambda+R(x), \qquad (5.4.4)$$

où $|R(x)|\leqslant\varepsilon h(x)$. En utilisant l'identité

$$\cos x\lambda z\sin^2\frac{x\lambda}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin^2\frac{x\lambda}{2}(z+1)+\sin^2\frac{x\lambda}{2}(z-1)-2\sin^2\frac{x\lambda}{2}z\right],$$

on peut écrire le second membre de (5.4.4) comme suit :

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\Big[\int_{1+\delta}^{s} z\,[h(x(z+1))+h(x(z-1))-2h(xz)]\,A(z)\,dz+$$
$$+\int_{1+\delta}^{s}[h(x(z+1))-h(x(z-1))]\,A(z)\,dz+$$
$$+\int_{\delta}^{1-\delta} z\,[h(x(z+1))-h(x(1-z))-2h(xz)]\,A(z)\,dz+$$
$$+\int_{\delta}^{1-\delta}[h(x(1+z))+h(x(1-z))]\,A(z)\,dz\Big]+R(x). \qquad (5.4.5)$$

La convergence vers 1 de $\frac{h(xz)}{h(z)}$ étant uniforme en $\mu\in[-\pi,\pi]$, $\delta\leqslant z\leqslant s+1$ (lemme 10), il vient que la première et la seconde intégrale dans (5.4.5) sont $o(h(x))$ uniformément en μ et la somme des autres termes à l'exception de $R(x)$, pour $x\to\infty$, devient uniformément en μ égale à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\delta}^{1-\delta}(1-z)\,A(z)\,dz\cdot h(x)\,(1+o(1)).$$

δ, ε étant quelconques, on voit que, uniformément en μ, on a

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}(1-z)\,A(z)\,dz\cdot h(x)\,(1+o(1))=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}a(\lambda)\,d\lambda\int_{0}^{1}(1-z)\cos\lambda z\,dz\cdot h(x)\,(1+o(1))=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}a(\lambda)\,d\lambda\cdot h(x)\,(1+o(1)). \qquad (5.4.6)$$

L e m m e 13. *Soit $a(\lambda)$ une fonction impaire, trois fois dérivable, à dérivée troisième bornée, s'annulant à l'extérieur de l'intervalle* $[-1, 1]$. *Pour $x\to\infty$ on a alors uniformément en* μ

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=o(h(x)). \qquad (5.4.7)$$

Démonstration. Supposons d'abord que $x \to \infty$ ne parcourt que des valeurs entières, et au lieu de x nous écrirons N. Tout comme précédemment, introduisons la transformée de Fourier de la fonction $a(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \lambda z a(\lambda)\, d\lambda, \\ a(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \lambda z A(z)\, dz. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné définissons l'ensemble

$$B_1 = \{z \geqslant s\} \cup \{z:\ |z - n| \leqslant \delta,\quad n = 0, 1, \ldots\}$$

de telle sorte que $\int_{B_1} |A(z)|\, dz < \varepsilon$. Désignons par B le complément de l'ensemble B_1 jusqu'à la demi-droite $[0, \infty]$, il vient

$$\frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda + \mu)\, a(N\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{N} \int_B A(z)\, dz \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \sin N\lambda z f(\lambda + \mu)\, d\lambda + R(N), \tag{5.4.9}$$

$$|R(N)| \leqslant \varepsilon h(N).$$

Pour N entier on a $\dfrac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} = \left| \sum_0^{N-1} e^{ij\lambda} \right|^2$. En développant $\sin N\lambda z$ en série de puissances de $e^{i\lambda}$ on trouve

$$\sin N\lambda z = \frac{\sin Nz\pi}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (e^{ij\lambda} - e^{-ij\lambda}) \left(\frac{1}{Nz - j} - \frac{1}{Nz + j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) (e^{ij\lambda} - e^{-ij\lambda}). \tag{5.4.10}$$

On peut écrire maintenant le premier terme du membre de droite de (5.4.9) comme suit :

$$\int_B A(z)\,dz\,\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}[\Phi_1(\lambda;\,z)+\Phi_2(\lambda;\,z)]\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{N}\int_B A(z)\,dz\int_{-\pi}^{\pi}[\Phi_1(-\lambda\,;\,z)+\Phi_2(-\lambda\,;\,z)]\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{N}\int_B A(z)\,dz\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_0(\lambda;\,z)\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda,$$

où

$$\Phi_1(\lambda;\,z)=\sum_{k=0}^{N-1}e^{ik\lambda}\sum_{j=1}^{N-1}a_j(z)\sum_{m=1}^{j}e^{im\lambda},$$

$$\Phi_2(\lambda\,;\,z)=\sum_{j=1}^{N-1}a_j(z)\sum_{k=N-j}^{N-1}e^{ik\lambda}\sum_{m=0}^{N-j-1}e^{-imh},\tag{5.4.11}$$

$$\Phi_0(\lambda\,;\,z)=2i\,\frac{\sin^2\frac{N\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\sum_{j=N}^{\infty}a_j(z)\sin j\lambda.$$

Passons à l'estimation des intégrales

$$\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_j(\lambda\,;\,z)\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda,\quad j=0,\,1,\,2.$$

1. Estimation de $\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_0(\lambda\,;\,z)\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda$.

Remarquons que $|\sum(-1)^k\sin k\lambda|\leqslant C$ pour tous les n, C étant une constante absolue. En utilisant la transformation d'Abel on obtient

$$\sum_{j=N}^{\infty}a_j(z)\sin j\lambda=\frac{\sin Nz\pi}{2\pi}\sum_{j=N}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{Nz-j}-\frac{1}{Nz-j-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{Nz+j}-\frac{1}{Nz+j+1}\right)\right]\sum_{k=N}^{j}(-1)^k\sin k\lambda.\tag{5.4.12}$$

On tire facilement de (5.4.12) que pour $z<1-\delta$ on a

$$|\Phi_0(\lambda\,;\,z)|\leqslant\frac{C}{\delta N}\,.\tag{5.4.13}$$

Supposons maintenant que $z > 1+\delta$. Fixons un n grand. En utilisant de nouveau la transformation d'Abel, on trouve pour des N suffisamment grands

$$\left| \sum_{|j-Nz|>n} a_j(z) \sin j\lambda \right| \leqslant C\left(\frac{1}{N\delta}+\frac{1}{n}\right). \tag{5.4.14}$$

La condition de régularité complète donne

$$\left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \sum_{|j-Nz|\leqslant n} a_j(z)\,(e^{ij\lambda}-e^{-ij\lambda})\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda \right| =$$

$$= \left| \sum_{|j-Nz|\leqslant n} \frac{a_j(z)}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\sum_{0}^{N-1} e^{ik(\lambda-\mu)} \right)^2 e^{i(j-N+1)(\lambda-\mu)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{0}^{N-1} e^{-ik(\lambda-\mu)} \right)^2 e^{-i(j-N+1)(\lambda-\mu)} \right] f(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4n}{N}\, \rho(N\delta-n) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\, d\lambda = o(h(N)). \tag{5.4.15}$$

Finalement, en vertu de (5.4.13)-(5.4.15) on a uniformément en μ

$$\frac{1}{N} \left| \int_B A(z)\, dz \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_0(\lambda\,;\, z)\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda \right| = o(h(N)). \tag{5.4.16}$$

2. Estimation de $\frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\lambda\,;\, z)\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda$.

Soit de nouveau n un nombre suffisamment grand, mais fixé. Décomposons la somme extérieure dans la formule de $\Phi_1(\lambda\,;\, z)$ (voir (5.4.11)) en deux sommes $\sum_{k=0}^{n}$ et $\sum_{k=n+1}^{N-1}$. L'intégrale de la première somme ne sera pas supérieure à

$$\frac{n}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N-1} a_j(z) \sum_{m=0}^{j-1} e^{im\lambda} \right| f(\lambda+\mu)\, d\lambda =$$

$$= \frac{n}{2N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|\sin \frac{\lambda}{2}\right|} \left| \sum_{1}^{N} a_j(z)\,(e^{ij\lambda}-1) \right| f(\lambda+\mu)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Cn}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|}\left|\sum_{j=1}^{N-1}a_j(z)\sin j\lambda\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda+$$

$$+\frac{Cn}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|}\left|\sum_{j=1}^{N}a_j(z)\sin^2\frac{j\lambda}{2}\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda. \qquad (5.4.17)$$

Les relations (5.4.10) et (5.4.13)-(5.4.15) permettent facilement de trouver que le second membre de (5.4.17) ne dépasse pas uniformément en μ la grandeur

$$\frac{Cn}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin N\lambda z}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda+o(h(N))\leqslant C\,\frac{n\sqrt{z}}{\sqrt{N}}\,h(Nz)+o(h(N)). \qquad (5.4.18)$$

Appliquons au second terme de

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_1(\lambda;\ z)\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda,$$

la transformation d'Abel, il vient:

$$\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=n}^{N-1}e^{ik\lambda}\sum_{j=1}^{N-1}a_j(z)\sum_{1}^{j}e^{im\lambda}\right)f(\lambda+\mu)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\left(\sum_{k=0}^{N-n-1}e^{ik\lambda}\sum_{j=1}^{N-2}\left(\sum_{s=1}^{j}a_s(z)\right)e^{i(j+1)\lambda}\right)f(\lambda+\mu)\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{N}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\left(\sum_{k=0}^{N-n-1}e^{ik\lambda}\sum_{m=1}^{N-1}e^{im\lambda}\sum_{j=1}^{N-1}a_j(z)\right)f(\lambda+\mu)\,d\lambda. \qquad (5.4.19)$$

Remarquons que pour $z\leqslant 1-\delta$, $j\leqslant Nz$ on a

$$\sum_{s=1}^{j}a_s(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{j}\frac{(-1)^s\sin Nz\pi}{Nz-s}+O\left(\frac{1}{N\delta}\right)=O\left(\frac{1}{N\delta}+\frac{|\sin Nz\pi|}{|Nz-j|}\right); \qquad (5.4.20)$$

pour $z\leqslant 1-\delta$, $j>Nz$ on a

$$\sum_{s=1}^{j}a_s(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^s\sin Nz\pi}{Nz-s}+O\left(\frac{1}{N\delta}+\frac{1}{|Nz-j|}\right); \qquad (5.4.21)$$

enfin, pour $z > 1+\delta$

$$\sum_{s=1}^{j} a_s(z) = O\left(\frac{1}{N\delta}\right). \tag{5.4.22}$$

Supposons que $z \leqslant 1-\delta$; compte tenu de (5.4.20), (5.4.21) et de la condition de régularité complète on obtient pour le module du second membre de (5.4.19) l'estimation majorante suivante:

$$\frac{C}{N}\left(\frac{1}{\delta}+\ln N\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{N-n}{2}\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda +$$
$$+\frac{C\theta(z)}{N}\rho(n+Nz)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{N-n}{2}\lambda}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 N\frac{1-z}{2}\lambda}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right)^{1/2} = o(h(N)), \tag{5.4.23}$$

où

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^s \sin Nz\pi}{Nz-s}.$$

D'une manière analogue, pour $z > 1+\delta$ on obtient l'expression suivante de l'estimation majorante de (5.4.19):

$$\frac{C}{N\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{N-n}{2}\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda = o(h(N)). \tag{5.4.24}$$

Il est évident que tant (5.4.23) que (5.4.24) sont vérifiées uniformément en μ et $z\in B$. A partir de (5.4.18) et (5.4.24) on a uniformément en μ et $z \in B$

$$\frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_1(\lambda\,;\,z) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| = o(h(N)).$$

3. Estimation de $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_2(\lambda\,;\,z) f(\lambda+\mu)\,d\lambda$.

En se donnant de nouveau un nombre n grand on a comme précédemment :

$$\frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(\lambda\,;\,z) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| =$$

$$= \frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{N-1} a_j(z)\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\lambda}\sum_{m=1}^{N-j} e^{im\lambda}\right) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(z)\sum_{k=0}^{j-1} e^{ik\lambda}\sum_{m=1}^{N-j} e^{im\lambda}\right) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| +$$

$$+ \frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=n+1}^{N-1} a_j(z)\sum_{m=1}^{N-j} e^{im\lambda}\right)\sum_{k=0}^{n} e^{ik\lambda} f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| +$$

$$+ \frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\left(\sum_{j=n+1}^{N-1} a_j(z)\sum_{k=1}^{j-n} e^{ik\lambda}\sum_{m=1}^{N-j} e^{im\lambda}\right) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right|. \quad (5.4.25)$$

Il est évident que le premier terme du membre de droite de (5.4.25) ne sera pas supérieur à

$$\frac{n}{N}\sum_{j=1}^{n} |a_j(z)| \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{N-j}{2}\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| f(\lambda+\mu)\,d\lambda = O\left(\frac{h(N)}{\sqrt{N}}\right) = o(h(N)).$$

(5.4.26)

En appliquant la transformation d'Abel au second et au troisième terme du second membre de (5.4.25) et en raisonnant comme lors de la recherche des estimations de (5.4.19) on obtient que ces deux termes sont uniformément en μ et $z \in B$ égaux à $o(h(N))$. Ainsi,

$$\frac{1}{N}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_2(z\,;\,\lambda) f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| = o(h(N)). \qquad (5.4.27)$$

Ce qui achève la démonstration du lemme pour des x entiers. Soit maintenant x un nombre réel quelconque. Ci-dessus (voir § 3) nous avons vu que $h(x) = h([x])(1+o(1))$ uniformément en μ, donc également uniformément en μ on a :

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\,a([x]\,\lambda)\,d\lambda -$$

$$- \frac{1}{[x]}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{[x]\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\,a([x]\,\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant Cx^{-1/4} = o(h(x)). \quad (5.4.28)$$

Enfin

$$\left|\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\left(a([x]\lambda)-a(x\lambda)\right)d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\max\limits_{\lambda}|a'(\lambda)|}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}|\lambda|\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right|\leqslant C\left(\frac{h(x)}{x}\right)^{1/2}=o(h(x)). \tag{5.4.29}$$

Le lemme 13 est démontré.

Lemme 14. *Soit* $a(\lambda)$ *une fonction à variation bornée, nulle à l'extérieur de l'intervalle* $[-1, 1]$. *Pour* $x\to\infty$ *on a uniformément en* μ

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=\frac{h(x)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}a(\lambda)\,d\lambda+o(h(x)). \tag{5.4.30}$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que soit bornée la dérivée troisième de la fonction $a(\lambda)$. En appliquant le lemme 12 à la fonction paire $\frac{a(\lambda)+a(-\lambda)}{2}$ et le lemme 13 à la fonction impaire $\frac{a(\lambda)-a(-\lambda)}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,\frac{a(x\lambda)+a(-x\lambda)}{2}\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,\frac{a(x\lambda)-a(-x\lambda)}{2}\,d\lambda=$$

$$=\frac{h(x)}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\,\frac{a(\lambda)+a(-\lambda)}{2}\,d\lambda+o(h(x))=$$

$$=\frac{h(x)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}a(\lambda)\,d\lambda+o(h(x)). \tag{5.4.31}$$

Supposons maintenant que $a(\lambda)$ soit à variation bornée. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque on peut toujours choisir deux fonctions $\underline{a}(\lambda)$ et $\bar{a}(\lambda)$ satisfaisant aux conditions du lemme, ayant la dérivée troisième bornée et telles que

$$\underline{a}(\lambda) \leqslant a(\lambda) \leqslant \bar{a}(\lambda),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\bar{a}(\lambda) - \underline{a}(\lambda)) \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} d\lambda < \varepsilon. \tag{5.4.32}$$

Pour les fonctions $a(\lambda)$ n'ayant qu'un nombre fini de sauts, c'est évident; si cependant le nombre de sauts de $a(\lambda)$ est infini, on peut préalablement choisir deux fonctions $\underline{b}(\lambda)$ et $\bar{b}(\lambda)$ satisfaisant à des inégalités du type (5.4.32) et ayant un nombre fini de sauts.

Si les fonctions $\underline{a}(\lambda)$ et $\bar{a}(\lambda)$ sont choisies conformément aux inégalités (5.4.32) on a

$$\frac{1}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\, \underline{a}(x\lambda)\, d\lambda \leqslant \frac{1}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\, a(x\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} f(\lambda+\mu)\, \bar{a}(x\lambda)\, d\lambda. \tag{5.4.33}$$

Pour les fonctions $\underline{a}(\lambda)$ et $\bar{a}(\lambda)$ on a (5.4.30), donc on peut écrire (5.4.33) comme suit:

$$\frac{h(x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \underline{a}(\lambda)\, d\lambda\, (1+o(1)) \leqslant \frac{1}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} f(\lambda+\mu)\, a(x\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h(x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \bar{a}(\lambda)\, d\lambda\, (1+o(1)). \tag{5.4.34}$$

Les membres extrêmes de (5.4.34) diffèrent l'un de l'autre et de $\frac{h(x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} a(\lambda)\, d\lambda$ d'au plus $\varepsilon h(x)(1+o(1))$, mais ε étant

arbitraire, on peut affirmer que l'on a également :

$$\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}f(\lambda+\mu)\,a(x\lambda)\,d\lambda=\frac{h(x)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}a(\lambda)\,d\lambda\,(1+o(1)).$$

Le lemme 14 est démontré. (En toute rigueur il reste encore à étudier spécialement les fonctions à discontinuité aux points ± 1, nous en laissons le soin au lecteur.)

Terminons la démonstration du théorème 5.

Soit $f(\lambda)$ la densité spectrale d'une suite aléatoire gaussienne $\xi(t)$ satisfaisant à la condition de régularité complète. Le lemme 7 permet de trouver le polynôme $P(z)$ de degré maximal pour lequel la fonction $w(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{|P(e^{i\lambda})|^2}$ est intégrable et

$$\inf_{\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{N\lambda}{2}}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}w(\lambda+\mu)\,d\lambda\to\infty.$$

Selon le lemme 11, $w(\lambda)$ est la densité spectrale d'une suite satisfaisant à la condition de régularité complète. Appliquons le lemme 14 à $w(\lambda)$, posant $a(\lambda)=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}$ si $|\lambda|\leqslant 1$ et $a(\lambda)=0$ si $|\lambda|>1$.

On voit que l'on a

$$\frac{1}{x}\int_{-1/x}^{1/x}w(\lambda+\mu)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}h(x)\,(1+o(1)) \tag{5.4.35}$$

uniformément en μ. Appliquons de nouveau le lemme 14, mais en considérant maintenant $a(\lambda)=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\lambda}{2}}$ si $0<\lambda\leqslant 1$ et $a(\lambda)=0$ si $\lambda>1$, avec $a(\lambda)=-a(-\lambda)$ si $\lambda<0$. On voit que l'on a

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{1/x}w(\lambda+\mu)\,d\lambda-\frac{1}{x}\int_{-1/x}w(\lambda+\mu)\,d\lambda=$$

$$=o(h(x))=o\left(\frac{1}{x}\int_{-1/x}^{1/x}w(\lambda+\mu)\,d\lambda\right) \tag{5.4.36}$$

uniformément en μ. En désignant par $W(\lambda)$ la primitive de $w(\lambda)$ et en remplaçant $1/x$ par δ on obtient pour (5.4.36) la forme équiva-

lente suivante : pour $\delta \to 0$ uniformément en μ

$$W(\mu+\delta)+W(\mu-\delta)-2W(\mu)=o\,(W(\mu+\delta)-W(\mu-\delta))$$

ou

$$W(\mu+\delta)+W(\mu-\delta)-2W(\mu)= \\ =o\,(W(\mu+\delta)-W(\mu)). \quad (5.4.37)$$

Il est facile de voir qu'avec les désignations habituelles $\Delta_\delta W(\mu) = W(\mu+\delta)-W(\mu)$, $\Delta_\delta^2 W(\mu)=\Delta_\delta\Delta_\delta W(\mu)$ (5.4.37) équivaut à la relation suivante : uniformément en μ

$$\Delta_\delta^2 W(\mu)=o\,(\Delta_\delta W(\mu)). \quad (5.4.38)$$

Enfin, en utilisant la désignation $\omega_W(\delta)$ figurant dans l'énoncé du théorème 5 on voit que (5.4.37) signifie que $\omega_W(\delta)\to 0$ pour $\delta\to 0$. Le théorème 5 est donc démontré.

Dans le § 5 nous donnerons certaines conséquences de ce théorème. Maintenant nous passons à la démonstration du théorème 6.

En vertu du théorème 2, pour la démonstration il suffit d'estimer $\rho(\tau, w)$. Ceci nous permet de supposer le polynôme P de la représentation (5.3.1) égal à 1.

Posons $W_1(\lambda)=W(\lambda)+a\lambda$, où a est pris de façon à avoir $W_1(\pi)=W_1(-\pi)$. De toute évidence on a

$$\sup_{\lambda,\,|x|\leqslant\delta}\frac{|W_1(\lambda+x)+W_1(\lambda-x)-2W_1(\lambda)|}{|W(\lambda+x)-W(\lambda-x)|}= \\ =\sup_{\lambda,\,|x|\leqslant\delta}\frac{|W(\lambda+x)+W(\lambda-x)-2W(\lambda)|}{|W(\lambda+x)-W(\lambda-x)|}=\omega_W(\delta).$$

L e m m e 15. *Pour des polynômes trigonométriques quelconques* ψ, $\varphi\in\mathscr{H}^2$ *on a l'égalité*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)e^{i\lambda\tau}f(\lambda)\,d\lambda= \\ =\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi'(\lambda)\psi(\lambda)+\varphi(\lambda)\psi'(\lambda)+i\tau\varphi(\lambda)\psi(\lambda)]\,e^{i\tau\lambda}W_1(\lambda)\,d\lambda. \quad (5.4.39)$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour $\tau>0$ quelconque on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)e^{i\lambda\tau}\,d\lambda=0.$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)e^{i\lambda\tau}f(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)e^{i\lambda\tau}\,dW_1(\lambda).$$

En intégrant la dernière intégrale par partie on obtient (5.4.39).

Puis pour démontrer le théorème 6 nous allons procéder comme suit. Les conditions 1) et 2) du théorème signifient que W_1 est une fonction suffisamment lisse et par conséquent peut être assez bien approchée par des polynômes trigonométriques. En faisant dans (5.4.39) une telle approximation de W_1 on obtient l'estimation de $\rho(\tau)$ (comparer avec la démonstration du théorème 1).

Soit $\varphi(\lambda)=\sum_0^n a_j e^{i\lambda j}$ un polynôme trigonométrique. Dans les conditions du théorème 6 on a les inégalités suivantes

$$\|\varphi'\|_f \leqslant C_1 n \|\varphi\|_f \text{ (inégalité de Zygmund)} \tag{5.4.40}$$

$$\Big\|\sum_0^m a_j e^{i\lambda j}\Big\|_f \leqslant C_2 \|\varphi\|_f, \quad m \leqslant n \text{ (inégalité de M. Riesz)} \tag{5.4.41}$$

et l'inégalité de Littlewood-Paley vraie pour un entier quelconque $r>0$:

$$\Big\|\sum_0^r a_j e^{i\lambda j}\Big\|_f^2 + \sum_p \Big\|\sum_{2^{p-1}r+1}^{2^p r} a_j e^{i\lambda j}\Big\|_f^2 \leqslant C_3 \|\varphi\|_f^2 \tag{5.4.42}$$

(on suppose ici que $a_j=0$ si $j>n$). Les constantes C_1, C_2, C_3 ne dépendent que de f et non de φ.

Dans l'hypothèse $0<m=\min f(\lambda)\leqslant f(\lambda)\leqslant \max f(\lambda)=$ $=M<\infty$ ces inégalités sont évidentes. Par exemple

$$\|\varphi'\|_f \leqslant \sqrt{M}\,\|\varphi'\|^{(2)} \leqslant \sqrt{M}\,n\,\|\varphi\|^{(2)} \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}}\,n\,\|\varphi\|_f .$$

D'une manière analogue on démontre les inégalités (5.4.41), (5.4.42); on peut poser, par exemple, $C_2=\sqrt{\frac{M}{m}}$, $C_3=\frac{M}{m}$.

L e m m e 16. *Soient*

$$\varphi(\lambda)=\sum_L^N a_j e^{i\lambda j}, \quad 0\leqslant L\leqslant N,$$

$$\psi(\lambda)=\sum_{L_1}^{N_1} b_j e^{i\lambda j}, \quad 0\leqslant L_1\leqslant N_1, \quad 1<L_1+L.$$

On a alors

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant C_4\left(\frac{M}{m}\right)^{3/2}\frac{N+N_1}{L+L_1-1}\,\omega_W\left(\frac{1}{L+L_1-1}\right). \tag{5.4.43}$$

Démonstration. Conformément à (5.4.39) il suffit de démontrer que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\lambda)\,\psi(\lambda)\,W_1(\lambda)\right| \leqslant C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \frac{N\omega_W\left(\frac{1}{L+L_1-1}\right)}{L+L_1-1},$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\,\psi'(\lambda)\,W_1(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \frac{N_1}{L+L_1-1}\,\omega_W\left(\frac{1}{L+L_1-1}\right). \tag{5.4.44}$$

En vertu des conditions du théorème 6 et par définition de W_1 on a

$$|W_1(\lambda+\delta) + W_1(\lambda-\delta) - 2W_1(\lambda)| \leqslant 2M\delta\omega_W(\delta),$$

c'est-à-dire que $W_1(\lambda)$ est une fonction lisse et conformément au théorème de N. Achieser (voir [25], page 274) la meilleure approximation $E_s(W_1)$ de la fonction W_1 par des polynômes trigonométriques de degré non supérieur à s satisfait à l'inégalité

$$E_s(W_1) \leqslant C_4 \frac{M}{s}\,\omega_W\left(\frac{1}{s}\right). \tag{5.4.45}$$

Soit Q le polynôme de meilleure approximation de W_1 dont le degré n'est pas supérieur à $L+L_1-1$. On a alors

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\lambda)\,\psi(\lambda)\,W_1(\lambda)\,d\lambda\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\lambda)\,\psi(\lambda)\,[W_1(\lambda)-Q(\lambda)]\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m} E_{L+L_1-1}(W_1)\,\|\varphi'\|_f\,\|\psi\|_f \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1C_4}{m} M \frac{N}{L+L_1-1}\,\omega_W\left(\frac{1}{L+L_1-1}\right) \leqslant C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \frac{N\omega_W\left(\frac{1}{L+L_1-1}\right)}{L+L_1-1}.$$

La seconde inégalité (5.4.44) se démontre d'une manière analogue.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 6. Soient φ, $\psi \in \mathscr{H}^2$ des polynômes trigonométriques tels que $\|\varphi\|_f = \|\psi\|_f = 1$ du type

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\tau+1}^{N} a_j e^{i\lambda j}, \qquad \psi(\lambda) = \sum_{0}^{N_1} b_j e^{i\lambda j}.$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $N = 2^p\tau$, $N_1 = 2^p\tau$, $p \geqslant 0$. Pour $j = 1, \ldots, p$ on peut poser

$$\varphi_j(\lambda) = \sum_{2^{j-1}\tau+1}^{2^j\tau} a_s e^{i\lambda s},$$

$$\Phi_j(\lambda) = \sum_{\tau+1}^{2^j\tau} a_s e^{i\lambda s},$$

$$\psi_j(\lambda) = \sum_{2^{j-1}\tau+1}^{2^j\tau} a_s e^{i\lambda s}, \qquad \psi_0(\lambda) = \sum_0^{\tau} a_s e^{i\lambda s},$$

$$\Psi_j(\lambda) = \sum_0^{2^j\tau} a_s e^{i\lambda s}.$$

En utilisant les inégalités (5.4.41)-(5.4.43) on obtient

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\psi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \left(\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_j(\lambda)\, \Psi_j(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi_j(\lambda)\, \Phi_j(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant 8C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \left[\max_j \| \Psi_j \|_f \sum_{j=1}^{p} \omega_W \left(\frac{1}{2^{j-1}\tau - 1} \right) \| \varphi_j \|_f + \right.$$

$$\left. + \max_j \| \Phi_j \|_f \sum_{j=1}^{p} \omega_W \left(\frac{1}{2^{j-1}\tau - 1} \right) \| \psi_j \|_f \right] \leqslant$$

$$\leqslant 8C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \omega_W^2 \left(\frac{1}{2^{j-1}\tau - 1} \right) \right)^{1/2} \left(\left(\sum_j \| \varphi_j \|_f^2 \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_j \| \psi_j \|_f^2 \right)^{1/2} \right) \leqslant 6C_4 \left(\frac{M}{m}\right)^{5/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \omega_W^2 \left(\frac{1}{2^{j-1}\tau - 1} \right) \right)^{1/2}. \quad (5.4.46)$$

Comme $C_4 \leqslant 5/2$ ([25], page 305) on arrive à (5.3.3). Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

§ 5. Conséquences des théorèmes fondamentaux. Exemples

Nous allons donner plusieurs conséquences des théorèmes des §§ 2 à 4 permettant de se faire une idée plus nette des restrictions imposées à la densité spectrale par la condition de régularité complète. Notons tout d'abord que

la densité spectrale d'un processus complètement régulier à temps discret n'a pas de discontinuités de première espèce (de sauts).

Pour la démonstration servons-nous de la représentation (5.3.1). Il suffit de démontrer que $w(\lambda)$ n'a pas de sauts. En effet, si $w(\lambda)$ avait un saut au point λ_0 elle serait bornée au voisinage de ce point. Par conséquent dans ce domaine la fonction $W(\lambda)$ serait lisse, en vertu de (5.3.1), c'est-à-dire qu'on aurait l'égalité

$$W(\lambda+\delta)+W(\lambda-\delta)-2W(\lambda)=o(\delta).$$

Mais on sait que ([3], page 182) la dérivée d'une fonction lisse est douée de la propriété de Darbou et ne peut avoir de discontinuités de première espèce.

Nous avons déjà noté que dans le développement (5.2.1) ou (5.3.1) c'est le premier facteur polynomial qui contient tous les zéros de la densité spectrale $f(\lambda)$, quant au second facteur $w(\lambda)$, il est « presque » positif, car tous les zéros de $f(\lambda)$ sont d'ordre pair. Pour donner à ce qui vient d'être dit un sens rigoureux remarquons tout d'abord que

les fonctions w des développements (5.2.1), (5.3.1) *sont sommables avec une puissance quelconque p, $-\infty < p < \infty$.*

Considérons w du développement (5.2.1). Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\| \exp\{\pm r \pm u_\varepsilon\}\|^{(\infty)} \leqslant \| \exp\{|r_\varepsilon| + |u_\varepsilon|\}\|^{(\infty)} < < \infty$. Nous avons déjà remarqué (page 178) que l'inégalité $\|v_\varepsilon\|^{(\infty)} < < \varepsilon$ entraîne, pour tout $k < \frac{\pi}{2\varepsilon}$, $\exp\{k\,|\tilde{v}_\varepsilon|\} \in \mathscr{L}^1$ et donc $e^{\pm \tilde{v}_\varepsilon} \in \mathscr{L}^p$, si toutefois $\varepsilon < \frac{\pi}{2p}$. Si maintenant w appartient au développement (5.3.1), en vertu du théorème 5 on a $w^{-1} \in \mathscr{L}^1$. Comparant maintenant (5.2.1) et (5.3.1) on voit que dans les deux développements la fonction w est la même.

Nous appellerons ordre, ordre supérieur, ordre inférieur du zéro λ_0 de la fonction $f(\lambda)$ respectivement les nombres

$$k(\lambda_0)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\ln f(\lambda)}{\ln|\lambda-\lambda_0|}, \quad \overline{k}(\lambda_0)=\overline{\lim_{\lambda\to\lambda_0}}\frac{\ln f(\lambda)}{\ln|\lambda-\lambda_0|},$$

$$\underline{k}(\lambda_0)=\underline{\lim_{\lambda\to\lambda_0}}\frac{\ln f(\lambda)}{\ln|\lambda-\lambda_0|}.$$

La proposition que nous venons de démontrer sur la sommabilité de w a pour conséquence que

l'ordre inférieur d'un zéro quelconque de w étant nul, l'ordre réel des zéros de $f(\lambda)$ ne peut être qu'un nombre entier pair.

Il est enfin évident que

la densité spectrale $f(\lambda)$ d'un processus complètement régulier $\xi(t)$ est sommable avec une puissance positive quelconque.

Nous allons maintenant passer à la construction d'exemples de processus complètement réguliers, plus exactement, des densités

spectrales $f(\lambda)$ de ces processus. Il est évident qu'à l'aide du théorème 1 on peut construire un grand nombre d'exemples. On aura des exemples non triviaux seulement si les conditions du théorème 1 ne sont pas respectées, c'est-à-dire si $f(\lambda)$ peut s'annuler d'une façon autre que polynomiale ou avoir des discontinuités (de seconde espèce, évidemment) ; on peut trouver de tels exemples en partant des théorèmes 3 et 6.

Etablissons préalablement le résultat suivant, en désignant par $\widetilde{\ln} f$ la fonction conjuguée de $\ln f \in \mathscr{L}^1(-\pi, \pi)$.

Théorème 7. *Si au moins l'une des fonctions* $\ln f$, $\widetilde{\ln} f$ *est continue, le processus stationnaire* $\xi(t)$ *de densité spectrale* $f(\lambda)$ *est complètement régulier, avec*

$$\rho(\tau) = o\left(\min \omega\left(\frac{1}{\tau}; \ln f\right), \omega\left(\frac{1}{\tau}; \widetilde{\ln} f\right)\right), \qquad (5.5.1)$$

où $\omega(\delta; h)$ *désigne le module de continuité de la fonction* $h(\lambda)$.

Démonstration. Dans le cas où c'est la fonction $\ln f(\lambda)$ qui est continue il suffit de se référer au théorème 1, car selon le théorème de Jackson sur les meilleures approximations on a $E_{\tau-1}(\ln f) = O\left(\omega\left(\frac{1}{\tau}; \ln f\right)\right)$. La régularité complète du processus $\xi(t)$ quand la fonction $\widetilde{\ln} f$ est continue découle du théorème 3. En effet, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ on peut, en se basant sur le théorème de Weierstrass, trouver un polynôme trigonométrique Q_ε tel que

$$\widetilde{\ln} f = Q_\varepsilon + v_\varepsilon, \quad \| v_\varepsilon \|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon.$$

Il est clair que la fonction $r_\varepsilon = \widetilde{Q}_\varepsilon$ est également un polynôme trigonométrique et par conséquent pour $\varepsilon > 0$ quelconque, $f(\lambda)$ peut s'écrire comme suit :

$$f(\lambda) = e^{\ln f(\lambda)} = e^{r_\varepsilon + \widetilde{v}_\varepsilon}, \quad \| v_\varepsilon \|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon.$$

On peut maintenant se référer au théorème 3.

Cependant pour trouver l'estimation (5.5.1) il y a lieu de donner la démonstration directe, d'ailleurs très simple.

Supposons cette fois que $Q(\lambda)$ est le polynôme trigonométrique de meilleure approximation de degré non supérieur à $\tau - 1$ de la fonction continue $e^{i \widetilde{\ln} f}$. Pour tous les $\theta \in \mathscr{H}^1$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} \theta(\lambda) Q(\lambda) \, d\lambda = 0.$$

Donc en vertu de (5.1.7)

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta \in H^1,\ \|\theta\|^1=1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda) \frac{\overline{g(e^{i\lambda})}}{g(e^{i\lambda})} d\lambda \right| = \sup_{\theta} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda) [e^{i\widetilde{\ln} f} - \right.$$

$$\left. - Q]\, d\lambda \right| \leqslant E_{\tau-1}(e^{i\widetilde{\ln} f}) = O\left(\omega\left(\frac{1}{\tau}; e^{i\widetilde{\ln} f}\right)\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{\tau}; \widetilde{\ln} f\right)\right).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Citons quelques exemples basés sur ce théorème.

E x e m p l e 1. Soit $\xi(t)$ un processus stationnaire de densité spectrale

$$f(\lambda) = \exp\left\{ \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos k\lambda}{k(\ln k+1)} \right\}.$$

Dans ce cas la fonction $\widetilde{\ln} f(\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin k\lambda}{k(\ln k+1)}$ est continue et en vertu du théorème 7 le processus $\xi(t)$ est complètement régulier. En se basant sur les propriétés des séries de Fourier à coefficients monotones *) on peut montrer que pour $\lambda \to 0$ on a

$$\ln f(\lambda) \sim \int_{1}^{1/\lambda} \frac{dt}{t(\ln t+1)} \sim \ln \ln \frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent pour $\lambda \to 0$ la fonction $f(\lambda)$ croît comme $\ln 1/\lambda$. D'une manière analogue le processus $\xi(t)$ de densité spectrale $1/f(\lambda)$ est également complètement régulier, mais maintenant sa densité spectrale s'annule à zéro comme $1/\ln 1/\lambda$. On peut calculer que le module de continuité $\omega(\delta)$ de la fonction $\widetilde{\ln} f$ ne dépasse pas dans cet exemple $O\left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right)$ de sorte que

$$\rho(\tau) = O\left(\frac{1}{\ln \tau}\right).$$

E x e m p l e 2. Notre second exemple sera celui d'un processus complètement régulier dont la densité spectrale est bornée supérieurement et inférieurement, mais a des discontinuités (de seconde espèce évidemment). Conformément au théorème 7, il suffit de construire une fonction bornée discontinue dont la fonction conjuguée soit continue.

A cet effet considérons le domaine rectangulaire avec des coupures représenté sur la figure 2 ; c'est l'« hippopotame de Littlewood » **).

*) Voir [13].

**) Voir J. E. L i t t l e w o o d, *A mathematician's miscellany*. London, 1957. On rencontre des domaines de ce type dans la théorie des bouts simples, voir [9].

Le nombre de coupures (de dents) est infini, la longueur de chaque coupure étant égale à 3/4. Soit $G(z)$ une application conforme du cercle unitaire sur ce domaine. Si $G(e^{i\lambda}) = u(\lambda) + iv(\lambda)$, il est évident que la fonction $v(\lambda)$ est discontinue, $0 \leqslant v \leqslant 1$, la fonction

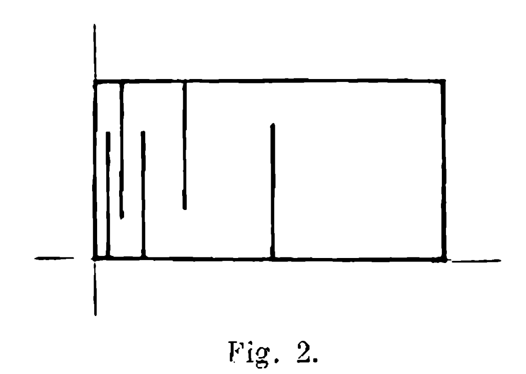


Fig. 2.

$u(\lambda) = \widetilde{v}(\lambda)$ étant continue. Pour la densité spectrale cherchée on peut prendre la fonction $f(\lambda) = e^{v(\lambda)}$. Il serait intéressant de donner pour $\rho(\tau)$ une estimation suffisamment bonne.

§ 6. Mélange intense

Jusqu'à présent nous avons étudié la convergence de $\rho(\tau)$ vers zéro, sans pour ainsi dire nous intéresser à la rapidité de la convergence. Nous allons étudier ce problème en cherchant à répondre quand, pour $\tau \to \infty$, $\rho(\tau)$ décroît suffisamment rapidement, pas plus lentement que $\tau^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, par exemple (notons que du point de vue de l'applicabilité du théorème central limite à un processus satisfaisant à la condition de mélange intense, c'est le cas le plus intéressant) *).

Théorème 8. *Pour que*

$$\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta}), \quad où \quad 0 < \beta < 1,$$

il faut et il suffit que la densité spectrale $f(\lambda)$ admette la représentation

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda), \tag{5.6.1}$$

où $P(z)$ est un polynôme à zéros sur $|z| = 1$, et la fonction $w(\lambda)$, $w(\lambda) \geqslant m > 0$, est strictement positive, étant r fois dérivable, sa dérivée r-ième satisfaisant à la condition de Hölder d'ordre β.

Démonstration. En vertu des théorèmes 3 et 5 la densité spectrale $f(\lambda)$ peut s'écrire sous la forme (5.3.1), où $w(\lambda)$ satisfait à la condition (5.3.2). Conformément au théorème 2 et au lemme 11

*) Voir [14] ou [22], chapitre 4.

on a de plus

$$\rho\,(n\,;f) \leqslant \rho\,(n-k\,;w),$$
$$\rho\,(n\,;\,\omega) \leqslant \rho\,(n\,;f), \tag{5.6.2}$$

où k est le degré du polynôme P. On peut donc se limiter au cas où $f \equiv w$, c'est-à-dire au cas où dans la représentation (5.3.1) le polynôme P ne figure pas et c'est la densité spectrale $f\,(\lambda)$ qui satisfait à la condition (5.3.2). Dans la suite nous supposons partout que $P \equiv 1$, sans le mentionner spécialement.

Il découle immédiatement du théorème 1 que les conditions du théorème sont *s u f f i s a n t e s*. En effet selon ce théorème on a

$$\rho\,(\tau\,;f) = \rho\,(\tau) \leqslant \frac{1}{m}\,E_{\tau-1}\,(f). \tag{5.6.3}$$

D'un autre côté, selon le théorème de Jackson sur l'ordre des meilleures approximations *), on a

$$E_{\tau-1}\,(f) \leqslant \frac{C}{\tau^{r+\beta}}\,. \tag{5.6.4}$$

Montrons que les conditions du théorème sont *n é c e s s a i r e s*. Nous avons déjà expliqué à la page 174 que la densité spectrale $f\,(\lambda)$ d'un processus dont le coefficient de régularité décroît rapidement doit être suffisamment lisse. Nous avons montré que la petitesse du coefficient de régularité entraîne celle du coefficient de Fourier correspondant de la fonction $f\,(\lambda)$. Nous utiliserons ici l'idée simple des raisonnements cités. Seulement au lieu des coefficients de Fourier, il est plus commode d'estimer directement des segments de la série de Fourier de $f\,(\lambda)$. Les résultats obtenus seront utilisés à leur tour pour l'estimation des meilleures approximations de la fonction $f\,(\lambda)$ par des polynômes trigonométriques. Enfin, les théorèmes inverses de Bernstein de la théorie des meilleures approximations permettent, connaissant l'ordre des meilleures approximations de la fonction $f\,(\lambda)$, d'en déduire à quel point elle est lisse. Voici le schéma approximatif de la démonstration.

Désignons par r_j le j-ième coefficient de Fourier de la fonction $f\,(\lambda)$. En vertu de (5.1.5) on a l'inégalité

$$\left|\sum_{2^k}^{2^{k+1}} r_j e^{ij\mu}\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{2^k}^{2^{k+1}} e^{ij(\mu-\lambda)}\right) f\,(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho\,(2^k)\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{0}^{2^k} e^{ij(\mu-\lambda)}\right| f\,(\lambda)\,d\lambda, \quad k \geqslant 0.$$

*) Voir [25], page 275.

Si l'on suppose de plus que $\max\limits_{\lambda} |f(\lambda)| \leqslant M < \infty$ on aura

$$\left| \sum_{2^k}^{2^{k+1}} r_j e^{ij\mu} \right| \leqslant \rho(2^k) M \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin 2^{k-1}}{\sin \frac{\lambda}{2}} \right| d\lambda \leqslant C_1 \rho(2^k) k.$$

Nous aurons de toute évidence les mêmes inégalités pour des k négatifs.

Si maintenant $2^k \leqslant \tau < 2^{k+1}$, la grandeur de la meilleure approximation de $f(\lambda)$ par des polynômes trigonométriques de degré τ ne dépassera certainement pas

$$\max_{\mu} \left| \sum_{|j| \geqslant 2^k} r_j e^{ij\mu} \right| \leqslant \sum_{p=k}^{\infty} \left| \sum_{2^p \leqslant |j| < 2^{p+1}} r_j e^{ij\mu} \right| \leqslant C_2 \sum_{p \geqslant \ln_2 \tau + 1} k\rho(2^k).$$

De l'inégalité obtenue découle presque immédiatement l'assertion du théorème 8; il est vrai que l'on peut garantir pour $f^{(r)}(\lambda)$ la condition de Hölder d'ordre $\beta - \varepsilon$ (mais non pas β), où ε est aussi petit que l'on veut.

Pour se débarrasser de cet ε il faudra effectuer des calculs assez compliqués. Au lieu des sommes de Fourier seront estimées les sommes tronquées de Fejér pour $f(\lambda)$ (il est tout naturel de les utiliser car, pratiquement, elles approchent $f(\lambda)$ avec autant de précision que les polynômes de meilleure approximation).

L e m m e 17. *Pour tout* θ, $0 < \theta < 1$, *on a les inégalités*

$$E_n(f) \leqslant \frac{32 \max\limits_{\lambda} f(\lambda)}{\theta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^k n(1-\theta)\,;\, f). \tag{5.6.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de considérer le cas où la série dans (5.6.5) converge; si cette série est divergente, l'inégalité (5.6.5) est triviale.

Nous allons tout d'abord montrer que si la série $\sum \rho(2^k)$ converge, la fonction $f(\lambda)$ est bornée. A cet effet revenons de nouveau à la fonction $\gamma(N;\mu)$ des §§ 3, 4 et montrons que $\gamma(N;\mu) \leqslant NM$, où la constante $M < \infty$ ne dépend pas de N ni de μ.

Lors de la démonstration du lemme 8 nous avons obtenu l'égalité (5.3.14). Si dans cette égalité on pose $k = 3$, il est facile de voir que

$$\gamma(3N;\mu) \leqslant 3\gamma(N;\mu) + 9\sqrt{\gamma(N;\mu)\,\gamma(r;\mu)} + 9\gamma(N;\mu)\,\rho(r).$$

Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, pour des N grands on a uniformément en μ (voir § 3)

$$N^{1-\varepsilon} \leqslant \gamma(N;\mu) \leqslant N^{1+\varepsilon}.$$

En prenant ici $\varepsilon = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2 \ln 6}$ on obtient pour des N grands uniformément en μ

$$\frac{\gamma(3N;\ \mu)}{3\gamma(N;\ \mu)} \leqslant 1 + 3\rho(r) + 3\frac{r^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{N^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}.$$

En posant enfin $N = 3^s$, $s = 1, 2, \ldots;\ r = r(N) = 2^s$, pour des s grands on aura uniformément en μ

$$\frac{\gamma(3^{s+1};\ \mu)}{3\gamma(3^s;\ \mu)} \leqslant 1 + 3\rho(2^s) + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{s/4}.$$

Par conséquent

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\gamma(3^s;\ \mu)}{3^s} \leqslant C \prod_1^\infty \left(1 + 3\rho(2^s) + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{s/4}\right) = M < \infty,$$

car

$$\sum_s \left[\rho(2^s) + \left(\frac{2}{3}\right)^{s/4}\right] < \infty.$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe une constante M telle que

$$3^{-s}\gamma(3^s;\ \mu) \leqslant M. \tag{5.6.6}$$

En vertu du théorème de Lebesgue pour presque tous les $\mu \in [-\pi, \pi]$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\gamma(N;\ \mu) = \lim_N \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 N\frac{\lambda-\mu}{2}}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} f(\lambda)\,d\lambda = 2\pi f(\mu)$$

et, compte tenu de (5.6.6), pour presque tous les μ on a $f(\mu) \leqslant \frac{M}{2\pi}$. Par conséquent on peut considérer que $\sup_\mu f(\mu) \leqslant M$.

Dans ce qui suit nous supposerons que $M = \sup_\mu f(\mu)$. Soit r_j le j-ième coefficient de Fourier de la fonction $f(\lambda)$, désignons par $S_n(\lambda) = \sum_{-n}^{n} r_j e^{ij\lambda}$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de la fonction $f(\lambda)$. Soit enfin un nombre quelconque θ, $0 < \theta < 1$, et considérons les sommes tronquées de Fejér pour la fonction $f(\lambda)$, soit

$$\sigma_n(f;\ [n\theta];\ \lambda) = \frac{1}{[n\theta]+1} \sum_{\nu=0}^{[n\theta]} S_{n-\nu}(\lambda).$$

Il est évident que

$$E_n(f) \leqslant \max_{\lambda} |g(\lambda) - \sigma_n(f;\ [n\theta];\ \lambda)|.$$

Montrons que

$$\max_{\lambda} |g(\lambda) - \sigma_n(f;\ [n\theta];\ \lambda)| \leqslant C(\theta) \sum_{k=0}^{\infty} \rho([2^k n(1-\theta)]),$$

où $C(\theta)$ est une constante ne dépendant que de θ. Considérons les différences

$$\Delta_k(\lambda) = \sigma_{2^{k+1}n}(f;\ [2^{k+1}n\theta];\ \lambda) - \sigma_{2^k n}(f;\ [2^k n\theta];\ \lambda).$$

Il est facile de voir que ces différences peuvent s'écrire comme suit :

$$\Delta_k(\lambda) = \Delta_k^+(\lambda) + \Delta_k^-(\lambda),$$

où les sommes Δ_k^+ et Δ_k^- sont

$$\Delta_k^+(\lambda) = \sum_{[2^k n\theta]+1}^{2^{k+1}n} a_j r_j e^{ij\lambda},$$

$$\Delta_k^-(\lambda) = \sum_{-2^{k+1}n}^{-[2^k n\theta]-1} a_j r_j e^{ij\lambda},$$

les coefficients a_j y figurant ne dépendent pas des fonctions $f(\lambda)$, leur forme exacte ne nous intéressant pas.

Après des calculs simples on a pour Δ_k^+ et Δ_k^-

$$\Delta_k^+(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} r_k^+(\lambda-\mu) f(\mu)\, d\mu,$$

$$\Delta_k^-(\lambda) = \int_{-\pi}^{n} r_k^-(\lambda-\mu) f(\mu)\, d\mu,$$

où

$$r_k^+(\lambda) = \frac{1}{[2^{k+1}n\theta]+1} \sum_{\nu=0}^{[2^{k+1}n\theta]} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^{k+1}n-\nu} e^{ij\lambda} - \\ - \frac{1}{[2^k n\theta]+1} \sum_{\nu=0}^{[2^k n\theta]} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^k n-\nu} e^{ij\lambda},$$

$$r_k^-(\lambda) = \overline{r_k^+(\lambda)}.$$

Le polynôme trigonométrique $r_k^+(\lambda-\mu)$ en tant que fonction de μ ne contient que des puissances négatives de $e^{i\mu}$, à commencer par

$\exp\{-(2^k n-[2^k n\theta]+1)\,\mu\}$. Donc (voir l'égalité (5.1.5))

$$|\Delta_k^+(\lambda)|\leqslant\rho\,(2^k n-[2^k n\theta]+1)\int_{-\pi}^{\pi}|r_k^+(\lambda-\mu)|\,f(\mu)\,d\mu\leqslant$$

$$\leqslant M\rho\,(2^k n-[2^k n\theta]+1)\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Re} r_k^+(\lambda-\mu)|\,d\mu+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Im} r_k^+(\lambda-\mu)|\,d\mu\Big]. \qquad (5.6.7)$$

D'une manière analogue

$$|\Delta_k^-(\lambda)|\leqslant M\rho\,(2^k n-[2^k n\theta]+1)\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Re} r_k^-(\lambda-\mu)|\,d\mu+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Im} r_k^-(\lambda-\mu)|\,d\mu\Big]. \qquad (5.6.8)$$

Montrons que les intégrales du second membre de ces inégalités sont bornées.

1) $\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Re} r_k^+(\lambda-\mu)|\,d\mu$ est bornée.

Pour simplifier l'écriture nous écrirons N au lieu de $2^k n$ et p au lieu de θN. Après des calculs simples on aura

$$\operatorname{Re} r_k^+(\lambda-\mu)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\lambda-\mu}{2}}\Big[\frac{1}{[2p]+1}\sin\frac{4N+1-[2p]}{2}(\lambda-\mu)\sin\frac{[2p]+1}{2}(\lambda-\mu)-$$

$$-\frac{1}{[p]+1}\sin\frac{2N+1-[p]}{2}(\lambda-\mu)\sin\frac{[p]+1}{2}(\lambda-\mu)\Big].$$

Pour s entier quelconque l'intégrale de Fejér s'écrit

$$\frac{1}{2\pi s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{s}{2}(\lambda-\mu)}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}}\,d\mu=1,$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Re} r_k^+(\lambda-\mu)|\,d\mu\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(4N+1-[2p])^{1/2}\,([2p]+1)^{1/2}}{[2p]+1}+\frac{(2N+1-p)^{1/2}\,(p+1)^{1/2}}{([p]-1)}\leqslant\frac{6}{\theta}.$$

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Im} r_k^+(\lambda-\mu)|\, d\mu$ est bornée.

En conservant la désignation $2^k n = N$ on a cette fois

$$\operatorname{Im} r_k^+(\lambda-\mu) = \frac{1}{2\pi([2N\theta]+1)} \sum_{\nu=0}^{[2N\theta]} \sum_{j=1}^{2N-\nu} \sin j(\lambda-\mu) - \\ - \frac{1}{2\pi([N\theta]+1)} \sum_{\nu=0}^{[N\theta]} \sum_{j=1}^{N-\nu} \sin j(\lambda-\mu).$$

Mais

$$\sum_{j=1}^{T} \sin\lambda = \frac{\cos\frac{\lambda}{2} - \cos\frac{2T+1}{2}\lambda}{2\sin\frac{\lambda}{2}},$$

$$\sum_{T=a}^{b} \cos\left(T+\frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{\sin\frac{b-a+1}{2}\lambda\cos\frac{b+a+1}{2}\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}},$$

de sorte que

$$|\operatorname{Im} r_k^+(\lambda-\mu)| =$$

$$= \left| -\frac{1}{4\pi([2N\theta]+1)} \frac{\sin\frac{[2N\theta]}{2}(\lambda-\mu)}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} \cos\frac{4N-[2N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi([N\theta]+1)} \frac{\sin\frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} \cos\frac{2N-[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi([2N\theta]+1} \frac{\left|\sin\frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)\right|}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} \sin^2\frac{4N-[2N\theta]+1}{4}(\lambda-\mu) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi([N\theta]+1} \frac{\left|\sin\frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)\right|}{\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} \sin^2\frac{2N-[N\theta]+1}{4}(\lambda-\mu) +$$

$$+ \left| \frac{\sin\frac{[2N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)}{4\pi([2N\theta]+1)\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} - \frac{\sin\frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)}{4\pi([N\theta]+1)\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}} \right|. \qquad (5.6.9)$$

L'intégrale des deux premiers termes du membre de droite de (5.6.9) ne dépassera pas $\frac{5}{4\theta}$. Pour simplifier l'écriture désignons par $b(\lambda)$ le dernier terme de (5.6.9). Pour $|\lambda| \leqslant 1/2$ on a $|\sin\lambda - \lambda| \leqslant |\lambda|^3$, donc

$$\int\limits_{\left\{|\lambda-\mu| \leqslant \frac{1}{[2N\theta]+1}\right\}} b(\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\left\{|\lambda-\mu| \leqslant \frac{1}{[2N\theta]+1}\right\}} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}([2N\theta]+1)\,|\lambda-\mu|\right)^3}{[2N\theta]+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}([N\theta]+1)\,|\lambda-\mu|\right)^3}{[N\theta]+1} \right] \frac{d\lambda}{\sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}} \leqslant 1 < \frac{1}{\theta}.$$

Dans le domaine $\pi \geqslant |\lambda-\mu| \geqslant \frac{1}{[2N\theta]+1}$ on aura

$$b(\lambda) \leqslant \frac{\left|\sin \frac{[2N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu)\right|}{4\pi \sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}} \left| \frac{1}{[2N\theta]+1} - \frac{1}{2([N\theta]+1)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{8\pi\left(\sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}\right)([N\theta]+1)} \times$$

$$\times \left| \sin \frac{[2N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) - \sin([N\theta]+1)(\lambda-\mu) \right| +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\left(\sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}\right)([N\theta]+1)} \times$$

$$\times \left| \sin \frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) \cos \frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) - \sin \frac{[N\theta]+1}{2}(\lambda-\mu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{2\pi\theta^2} + \frac{3}{2\pi\theta^2} + \frac{\sin^2 \frac{[N\theta]+1}{4}(\lambda-\mu)}{2\pi([N\theta]+1)\sin^2 \frac{\lambda-\mu}{2}},$$

et don

$$\int\limits_{\left\{|\lambda-\mu| \geqslant \frac{1}{[2N\theta]+1},\ |\lambda| \leqslant \pi\right\}} b(\lambda)\, d\lambda \leqslant \frac{5}{\theta^2} + \frac{4}{\theta}.$$

Finalement on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Im} r^{+}(\lambda-\mu)|\, d\mu \leqslant \frac{10}{\theta^2}.$$

En réunissant les estimations obtenues on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |r^{+}(\lambda-\mu)|\, d\mu &\leqslant \frac{16}{\theta^2}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} |r^{-}(\lambda-\mu)|\, d\mu &\leqslant \frac{16}{\theta^2}. \end{aligned} \tag{5.6.10}$$

En revenant à l'estimation de $\Delta_k(\lambda)$ on obtient à partir de (5.6.7) et (5.6.10)

$$|\Delta_k(\lambda)| \leqslant C(\theta)\,\rho\,(2^k n - [2^k n\theta] + 1) \leqslant C(\theta)\,\rho\,(2^k [n(1-\theta)]), \tag{5.6.11}$$

où

$$C(\theta) \leqslant \frac{32}{\theta^2} M,$$

La série $\sum \rho\,(2^k)$ étant convergente, la dernière inégalité signifie que la série $\sum \Delta_k(\lambda)$ et donc également la suite $\{\sigma_{2^k n}(f; [2^k n\theta]; \lambda)\}$ convergent uniformément. Mais la suite des sommes tronquées de Fejér $\sigma_{2^k n}(f; [2^k n\theta)]; \lambda)$ pour presque tous les λ converge vers $f(\lambda)$ *) et par conséquent $f(\lambda)$ est une limite uniforme des polynômes $\sigma_{2^k n}(f; [2^k n\theta]; \lambda)$.

Enfin, en prenant la somme des inégalités (5.6.11) on trouve que

$$E_n(f) \leqslant \max_{\lambda} |f(\lambda) - \sigma_{2^k n}(f; [2^k n\theta]; \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum |\Delta_k(\lambda)| \leqslant \frac{32M}{\theta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \rho\,(2^k [n(1-\theta)]).$$

Le lemme 17 se trouve démontré.

Le théorème 8 est la conséquence immédiate du lemme 17. En effet, en considérant l'inégalité (5.6.5) et l'hypothèse du théorème sur la vitesse de décroissance de $\rho(\tau)$ on peut affirmer que

$$E_n(f) \leqslant \frac{\text{const}}{n^{r+\beta}\theta^2 (1-\theta)^{r+\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(r+\beta)} = O(n^{-r-\beta}). \tag{5.6.12}$$

En vertu des théorèmes inverses de la théorie des approximations **), il découle des inégalités (5.6.12) que la fonction $f(\lambda)$ est r fois dérivable, et $f^{(r)}(\lambda)$ satisfait à la condition de Hölder d'ordre β.

*) Voir, par exemple, [25], page 533.

**) Voir, par exemple, le théorème de Bernstein [25], chap. VI.

Il ne nous reste qu'à démontrer que la fonction $f(\lambda)$ est positive (rappelons que $P \equiv 1$!). Supposons que $f(\lambda)$ s'annule au point λ_0. La fonction $f(\lambda)$ satisfait à la condition de Hölder d'ordre $\geqslant \beta$ ($|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \leqslant C |\lambda_1 - \lambda_2|^{\beta}$ de sorte que $|f(\lambda)| \leqslant C |\lambda - \lambda_0|^{\beta}$). Ainsi, l'ordre inférieur du zéro en λ_0 est

$$\underline{k}(\lambda_0) = \varliminf_{\lambda \to \lambda_0} \frac{|\ln f(\lambda)|}{|\ln |\lambda - \lambda_0||} \geqslant \beta > 0,$$

ce qui se trouve en contradiction avec l'assertion de la page 209 selon laquelle $\underline{k}(\lambda_0) = 0$. Le théorème 8 est donc entièrement démontré.

Essayons de trouver maintenant les conditions pour lesquelles le coefficient de régularité décroît encore plus rapidement, plus exactement, décroît comme une exponentielle.

Théorème 9. *Pour que*

$$\varlimsup_{\tau \to \infty} \sqrt[\tau]{\rho(\tau)} \leqslant e^{-\delta}, \text{ où } 0 < \delta < \infty,$$

il faut et il suffit que la densité spectrale $f(\lambda)$ *admette un prolongement analytique dans la bande* $-\delta < \operatorname{Im} \zeta < \delta$ *des valeurs de la variable complexe* $\zeta = \lambda + i\mu$.

Démonstration. Supposons que la fonction $f(\lambda)$ soit analytique dans la bande mentionnée. Sur le segment $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ elle n'a qu'un nombre fini de zéros. Soit $|P(z)|^2$ un polynôme de degré k, dont tous les zéros coïncident avec les zéros réels de $f(\lambda)$. On a alors $f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda)$, où la fonction $w(\lambda)$ est strictement positive sur l'axe réel et admet un prolongement analytique dans la même bande que $f(\lambda)$. Il est facile de voir que ce prolongement analytique, par exemple $w(\zeta)$, est borné dans toute bande de la forme $-\delta' \leqslant \operatorname{Im} \zeta \leqslant \delta'$, $\delta' < \delta$.

Selon le théorème de Bernstein *) $\varlimsup_{\tau \to \infty} \sqrt[\tau]{E_\tau(w)} \leqslant e^{-\delta}$, mais alors conformément à l'inégalité (5.6.3) on a

$$\varlimsup \sqrt[\tau]{\rho(\tau;\, w)} \leqslant e^{-\delta}.$$

Par conséquent on a également

$$\varlimsup_{\tau} \sqrt[\tau]{\rho(\tau;\, f)} \leqslant \varlimsup_{\tau} \sqrt[\tau]{\rho(\tau - k;\, w)} \leqslant e^{-\delta}.$$

Inversement, supposons que $\varlimsup_{\tau} \sqrt[\tau]{\rho(\tau;\, f)} \leqslant e^{-\delta}$. On a alors $\rho(\tau;\, f) \leqslant e^{-\delta\tau}(1 + \varepsilon(\tau))^{\tau}$, où $\lim_{n} \varepsilon(\tau) = 0$, et en vertu du

*) Voir [1], page 235.

lemme 17

$$\overline{\lim_{\tau}}\,[E_\tau(f)]^{1/\tau} \leqslant \lim_{\tau}\Big[\frac{CM}{\theta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-[\tau(1-\theta)]\,\delta 2^{-k}\}\times$$

$$\times\,(1+\varepsilon([\tau(1-\theta)]\,2^k))^{[\tau(1-\theta)]2^k}\Big]^{1/\tau} = e^{-(1-\theta)\delta}.$$

Le nombre θ est ici quelconque, il faut seulement que $0 < \theta < 1$ et donc $\overline{\lim}\,[E_\tau(f)]^{1/\tau} \leqslant e^{-\delta}$. Selon le théorème inverse de Bernstein la fonction $f(\lambda)$ a un prolongement analytique dans la bande $-\delta < \operatorname{Im}\zeta < \delta$ et est bornée dans une bande quelconque de la forme $-\delta' \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant \delta$, $\delta' < \delta$. Le théorème est démontré.

D'une manière analogue on peut démontrer les résultats suivants.

T h é o r è m e 10. *Pour que* $\rho(\tau) = O(e^{-\tau\delta})$ *pour* $\delta > 0$ *quelconque il faut et il suffit que le prolongement analytique de* $f(\lambda)$ *soit une fonction entière de la variable complexe* $\zeta = \lambda + i\mu$.

Signalons encore le résultat suivant.

T h é o r è m e 11. *Pour que* $\rho(\tau) = 0$ *pour tous les* $\tau \geqslant k+1$ *il faut et il suffit que* $f_k(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2$, *où* $P(z)$ *est un polynôme de degré non supérieur à* k.

De toute évidence la condition est suffisante. Le fait qu'elle est nécessaire découle de l'inégalité

$$\Big|\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda s} f(\lambda)\,d\lambda\Big| \leqslant \rho(s)\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\,d\lambda = 0,$$

si $|s| \geqslant k+1$.

R e m a r q u e 1. On peut donner au théorème 8 une forme plus achevée si on permet à β de prendre également la valeur 1 ; pour cela au lieu des théorèmes de Jackson et de Bernstein il faut se référer à un résultat plus exact, estimant la meilleure approximation en fonction du module de continuité *). Le théorème 8 s'énoncera alors comme suit :

T h é o r è m e 8'. *Pour que* $\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta})$ *pour un certain* β, $0 < \beta \leqslant 1$, *il faut et il suffit que* $f(\lambda)$ *admette la représentation*

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 w(\lambda),$$

$w(\lambda)$ *étant strictement positive et admettant* r *dérivées, de plus uniformément en* μ *on a*

$$\max_{h\leqslant\delta}|w^{(r)}(\lambda+h)+w^{(r)}(\lambda-h)-2w^{(r)}(\lambda)| = O(\delta^\beta).$$

R e m a r q u e 2. Le lemme 17 a pour conséquence la proposition forte utile suivante :

Si $\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^k) < \infty$ *la densité spectrale* $f(\lambda)$ *est continue.*

*) Voir [25], page 275.

CHAPITRE VI

RÉGULARITÉ COMPLÈTE. PROCESSUS À TEMPS CONTINU

§ 1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les caractéristiques spectrales des processus stationnaires complètement réguliers $\xi(t)$ à temps continu t, $-\infty < t < \infty$. Conformément à ce qui a été exposé au § 1 du chapitre IV, les résultats obtenus à ce sujet seront également valables pour les spectres gaussiens satisfaisant à la condition de mélange intense. Notons préalablement que les résultats concernant le comportement des densités spectrales $f(\lambda)$ des processus complètement réguliers à temps continu sur un intervalle quelconque fini de variation de λ sont analogues aux résultats du chapitre V, démontrés pour des processus à temps discret. Des difficultés spécifiques apparaissent seulement lorsqu'il s'agit du comportement de $f(\lambda)$ pour $\lambda \to \infty$; malheureusement notre étude de cette question n'est pas très complète. Les théorèmes 5 et 6 (voir ci-dessous §§ 5, 6) permettent de se faire une idée des phénomènes apparaissant ici.

Tout processus complètement régulier est (linéairement) régulier et en conformité des résultats exposés au § 1 du chapitre IV jouit des propriétés suivantes :

a) sa densité spectrale $f(\lambda)$ admet la représentation $f = |g|^2$, où g est une fonction extérieure de la classe $\mathscr{H}^2$ dans le demi-plan supérieur ;

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty.$$

Il s'ensuit, compte tenu du théorème 2 du chapitre II, que le coefficient de régularité $\rho(\tau)$ (égal par définition à $\sup |\mathrm{M}\eta_1\bar{\eta}_2|$, où $\eta_1 \in H(-\infty, 0)$, $\eta_2 \in H(0, \infty)$, $\mathrm{M}|\eta_1|^2 = \mathrm{M}|\eta_2|^2 = 1$) peut s'écrire sous la forme analytique suivante

$$\rho(\tau) = \sup_{\varphi, \psi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} \varphi(\lambda) \psi(\lambda) f(\lambda) d\lambda \right|, \qquad (6.1.1)$$

où le suprémum est pris sur tous les φ, ψ de la sphère unitaire $E^+(f)$ de l'espace $L^+(f) = \frac{1}{g}\mathscr{H}^2$. (Tout comme dans le chapitre précédent,

les fonctions spectrales F, G, . . . que nous considérons ici sont absolument continues, donc au lieu de $L^+(F)$, $L^+(G)$, $\|\cdot\|_F$, $(\cdot\,,\cdot)_G$, etc., nous écrirons respectivement $L^+(f)$, $L^+(g)$, $\|\cdot\|_f$, $(\cdot\,,\cdot)_g$, où $f = F'$, $g = G'$, . . .)

Il est clair que la grandeur $\rho(\tau)$ ne changera pas si dans (6.1.1) on prend le suprémum non sur toute la sphère $E^+(f)$ mais seulement sur un de ses ensembles denses, par exemple, sur $\mathscr{H}^2 \cap E^+(f)$, sur des fonctions du type $\sum a_j e^{i\lambda t_j}$, $t_j \geqslant 0$, etc.

A partir de (6.1.1) on peut déduire une égalité analogue à (5.1.5):

$$\rho(\tau) = \sup_\theta \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda \right|, \tag{6.1.2}$$

où le suprémum est pris sur tous les $\theta \in \mathscr{H}^1$, $\|\theta\|_f^{(1)} \leqslant 1$.

Enfin, compte tenu de l'égalité $L^+(f) = \frac{1}{g}\mathscr{H}^2$ et en remplaçant dans (6.1.1) φ, ψ par φ_1/g, ψ_1/g, φ, $\psi \in \mathscr{H}^2$, on trouve

$$\rho(\tau) = \sup_{\varphi_1,\, \psi_1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\varphi_1(\lambda)\, \psi(\lambda) \frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\, d\lambda \right|, \tag{6.1.3}$$

où φ_1, ψ_1 parcourent maintenant la sphère unitaire $\mathscr{H}^2$. Cette égalité est analogue à la formule (5.1.6). On déduit de (6.1.3) (comparer avec la déduction de (5.1.7) à partir de (5.1.6))

$$\rho(\tau) = \sup_\theta \left| \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\lambda)\, e^{i\lambda\tau} \frac{\overline{g(\lambda)}}{g(\lambda)}\, d\lambda \right|, \quad \theta \in \mathscr{H}^1, \tag{6.1.4}$$

$$\|\theta\|^{(1)} \leqslant 1.$$

Considérant ensuite l'intégrale dans le second membre de cette dernière égalité comme une fonctionnelle $l(\theta)$ dans $\mathscr{L}^1$, on arrive tout comme au § 2 du chapitre V à l'égalité

$$\rho(\tau) = \inf_A \left\| \frac{\overline{g}}{g}\, e^{i\lambda\tau} - A \right\|,$$

où l'infimum est pris sur tous les $A \in \mathscr{H}^\infty$ dans le demi-plan supérieur. En partant de cette égalité, on peut, en suivant le chemin tracé au § 2 du chapitre V, presque arriver au but; les difficultés ne permettant pas d'obtenir un résultat aussi définitif qu'est le théorème 3 du chapitre V n'apparaissent qu'à la fin de la démonstration, lorsqu'au lieu des polynômes P (voir page 179) on verra apparaître des fonctions entières de degré fini et il sera alors nécessaire de démontrer leur indépendance de ε. Nous nous bornerons au résultat suivant qui, tout comme le théorème 1 du chapitre V, a pour but de donner certaines notions préliminaires sur les densités spectrales des processus complètement réguliers.

Théorème 1. *Supposons que la densité spectrale $f(\lambda)$ d'un processus stationnaire $\xi(t)$ est de la forme*

$$f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2 w(\lambda), \tag{6.1.5}$$

où $\Gamma(\lambda)$ est une fonction entière de carré sommable de degré fini, et la fonction w pour tous les $\varepsilon > 0$ admet la représentation

$$w = \exp\{r_\varepsilon + t_\varepsilon + \tilde{s}_\varepsilon\}, \tag{6.1.6}$$

où r_ε est une fonction réelle bornée uniformément continue sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, t_ε une fonction réelle telle que $\| t_\varepsilon \|^{(\infty)} \leqslant \varepsilon$ et $\tilde{s}_\varepsilon$ une fonction conjuguée (harmonique) de s_ε, $\| s_\varepsilon \|^\infty \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas le processus $\xi(t)$ est complètement régulier.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par fonction conjuguée d'une fonction bornée. Désignons par W^2 la classe des fonctions mesurables $a(\lambda)$ telles que $\frac{a}{1+|\lambda|} \in \mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. En particulier, $\mathscr{L}^\infty \in W^2$. On peut écrire

$$a(\lambda) = (\lambda - i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u)\, e^{i\lambda u}\, du,$$

où $\alpha(u)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{a(\lambda)}{\lambda - i} \in \mathscr{L}^2$. La fonction conjuguée de a est définie par l'égalité

$$\tilde{a}(\lambda) = (\lambda - i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u)\, i \operatorname{sign} u \cdot e^{i\lambda u}\, du \tag{6.1.7}$$

(pour plus de détail voir [1], page 171). (6.1.7) nous autorise à écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{a}(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| (\lambda + i)^{-1} \|^{(2)} \cdot \| \alpha \|^{(2)}. \tag{6.1.8}$$

Au cours de la démonstration du théorème 1 et dans la suite nous rencontrerons des fonctions non négatives f, pouvant être non sommables, mais pour lesquelles $\rho(\tau)$ défini par l'égalité (6.1.1) tend néanmoins vers zéro. Nous aurons donc besoin de définir une classe de fonctions que nous appellerons complètement régulières.

Définition. *Une fonction mesurable non négative $f(\lambda)$ est dite complètement régulière si*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty$;

2) $\displaystyle\rho(\tau) = \sup_{\varphi, \psi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda) e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \right| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0,$

le suprémum étant pris sur tous les $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^{2+}$, $\| \varphi \|_f = \| \psi \|_f = 1$.

Toute fonction sommable complètement régulière se trouve être la densité spectrale d'un processus complètement régulier, et inversement, la densité spectrale d'un processus complètement régulier est une fonction complètement régulière.

En vertu de la condition 1) toute fonction complètement régulière est factorisable : $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$, où

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda - z}\,\frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right\}$$

est une fonction extérieure dans le demi-plan supérieur. On en déduit immédiatement (voir page 51) *), que la fermeture de $L^+(f)$ dans $L(f)$ de l'ensemble $\mathscr{H}^2 \cap L(f)$ est égale à $\frac{1}{g}\mathscr{H}^2$.

En revenant au théorème 1, montrons tout d'abord que la fonction w, représentable par (6.1.6), est complètement régulière. Une fonction bornée uniformément continue e^{r_ε} peut être approchée aussi bien que l'on veut par des fonctions entières bornées de degré fini (voir [25]). Soit Q_T une fonction entière bornée de degré non supérieur à T telle que

$$e^{r_\varepsilon} = Q_T(1+\theta), \qquad |\theta| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$w(\lambda) = Q_T e^{\widetilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}(1+\theta_\varepsilon), \quad \|\theta_\varepsilon\|^{(\infty)} \leqslant 7\varepsilon.$$

Posons $w_\varepsilon = |Q_T|\,|e^{\widetilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}|$. Si ε est suffisamment petit, pour tous les $\varphi \in L(w)$ on a

$$\frac{1}{2}\|\varphi\|_{w_\varepsilon} \leqslant \|\varphi\|_w \leqslant 2\|\varphi\|_{w_\varepsilon}.$$

En vertu de (6.1.8) on a $\frac{\widetilde{v}_\varepsilon}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1$, de sorte que $L^+(w) = L^+(e^{\widetilde{v}_\varepsilon}) = \frac{1}{\gamma}\mathscr{H}^2$, où la fonction extérieure $\gamma(z)$ est donnée par l'égalité $|\gamma(\lambda)|^2 = e^{\widetilde{v}_\varepsilon}$. De toute évidence on a $\gamma = \exp\left\{\frac{1}{2}(\widetilde{v}_\varepsilon - iv)\right\}$.

Si φ, $\psi \in L^+(w)$, on a $\varphi = \varphi_1/\gamma$, $\psi = \psi_1/\gamma$, où φ_1, $\psi_1 \in \mathscr{H}^2$. De plus, pour $\tau > T$ on a $e^{i\lambda\tau}Q_T \in \mathscr{H}^\infty$, donc par exemple $e^{i\lambda\tau}\varphi_1 Q_T \in \mathscr{H}^2$.

*) Voici la démonstration. La fonction $w^+ = \max(1, w)$ est factorisable : $w^+ = |g^+|^2$, où g^+ est une fonction extérieure. Si φ est une fonction extérieure de $\mathscr{H}^2$, $\varphi/g^+ \in \mathscr{H}^2$ et $\varphi/g^+ \in L(w)$, de sorte que $\mathscr{H}^2 \cap L(w)$ n'est pas vide. Comme φg est une fonction extérieure de $\mathscr{H}^2$, d'après le théorème de Lax (voir § 1, chap. II) $g\varphi\mathscr{H}^2$ et par conséquent $g\mathscr{H}^2$ contient un ensemble dense dans $\mathscr{H}^2$. Donc, $\frac{1}{g}\mathscr{H}^2 \subset L^+(\omega)$. Inversement, si $\psi \in L^+(w)$, alors la fontion ψg, qui est la borne des fonctions $\varphi_n g$, $\varphi_n \in \mathscr{H}^2$, $\varphi_n g \in \mathscr{H}^2$ dans $\mathscr{L}^2$, est de ce fait également une fonction de $\mathscr{H}^2$, c'est-à-dire que l'on a $L^+(w) \subset \frac{1}{g}\mathscr{H}^2$.

Par conséquent, pour tous les $\tau > T$ et $\varphi,\ \psi \in L^+(w)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}Q_T(\lambda)\,e^{\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon}d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}Q_T(\lambda)]\ \psi_1(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Ainsi pour tous les $\tau > T$

$$\rho(\tau,\ w) = \sup_{\varphi,\ \psi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}w(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi,\ \psi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|\,|\psi(\lambda)|\,|w_\varepsilon(\lambda)|\,|\theta_\varepsilon(\lambda)|\,d\lambda \leqslant 28\varepsilon.$$

L'assertion du théorème découle du lemme suivant qui est l'analogue du théorème 2 du chapitre V.

L e m m e 1. *Si w est une fonction complètement régulière, Γ une fonction entière bornée de degré fini* $\leqslant T$, et $f = |\Gamma|^2 w$, *la fonction f est également complètement régulière, avec*

$$\rho(\tau;\ f) \leqslant \rho(\tau - 2T;\ w). \tag{6.1.9}$$

En effet $\frac{\ln|\Gamma|}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1$ et pour $\tau \geqslant T$ les deux fonctions sont telles que $e^{i\lambda\tau}\Gamma,\ e^{\lambda i\tau}\overline{\Gamma} \in \mathscr{H}^\infty$ *). Donc, si $\varphi,\ \psi$ appartiennent à la sphère unitaire de $L^+(f)$, $e^{i\lambda T}\Gamma\varphi,\ e^{i\lambda T}\overline{\Gamma}\psi$ appartiennent à la sphère unitaire de l'espace $L^+(w)$ et par conséquent

$$\rho(\tau;\ f) = \sup_{\varphi,\ \psi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\,e^{i\lambda\tau}w(\lambda)\,|\Gamma(\lambda)|^2\,d\lambda\right| =$$

$$= \sup_{\varphi,\ \psi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi e^{i\lambda T}\Gamma]\,[\psi e^{i\lambda T}\overline{\Gamma}]\,e^{i\lambda(\tau-2T)}w\,d\lambda\right| \leqslant \rho(\tau - 2T;\ w).$$

Le lemme et le théorème 1 se trouvent ainsi démontrés.

C o r o l l a i r e. *Si la densité spectrale est de la forme $f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2 w(\lambda)$, où Γ est une fonction entière de carré sommable de degré $\leqslant T$ et la fonction w est bornée supérieurement et inférieurement $(0 < m \leqslant w \leqslant M < \infty)$ et uniformément continue sur $(-\infty,\ \infty)$, le processus $\xi(t)$ est complètement régulier, avec*

$$\rho(\tau) \leqslant \frac{1}{m} A_{\tau-2T}(\omega). \tag{6.1.10}$$

Par $A_\sigma(h)$ on désigne ici et ci-dessous la meilleure approximation de la fonction h par des fonctions entières de degré fini $\leqslant \sigma$.

*) Rappelons que $\overline{\Gamma}(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$.

En effet, on a $w = e^{\ln w}$ et d'après les conditions du corollaire la fonction $\ln w$ est bornée et uniformément continue. L'inégalité (6.1.10) s'obtient facilement par des raisonnements ayant servi à la démonstration du théorème 1.

§ 2. Etude de la fonction spéciale $\gamma(T;\ \mu)$

Dans ce paragraphe et les deux suivants nous allons généraliser au cas continu les résultats des §§ 3, 4 du chapitre V. Nous commencerons comme auparavant par l'étude du comportement de l'intégrale de Fejér

$$\gamma(T;\ \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda+\mu)\, d\lambda \tag{6.2.1}$$

pour $T \to \infty$. $f(\lambda)$ est ici la densité spectrale d'un processus complètement régulier $\xi(t)$. Dans ce qui suit la fonction $\gamma(T;\ \mu)$ jouera le même rôle que la fonction $\gamma(N;\ \mu)$ du chapitre V.

Notons que

$$\gamma(T;\ \mu) = \mathbf{M}\left|\int_0^T e^{-i\mu t}\xi(t)\, dt\right|^2. \tag{6.2.2}$$

Pour la démonstration nous nous servons de la représentation spectrale du processus

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\Phi(d\lambda),$$

où $\Phi(d\lambda)$ est la mesure orthogonale aléatoire ($\mathbf{M}\,|\,\Phi(d\lambda)\,|^2 = f(\lambda)\, d\lambda$). On a

$$\mathbf{M}\left|\int_0^T e^{-i\mu t}\,\xi(t)\, dt\right|^2 = \mathbf{M}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda-\mu)T}-1}{i(\lambda-\mu)}\,\Phi(d\lambda)\right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T\frac{\lambda-\mu}{2}}{(\lambda-\mu)^2}\, f(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda+\mu)\, d\lambda. \tag{6.2.3}$$

L e m m e 2. *Si la densité spectrale du processus aléatoire* $\xi(t)$ *est* $f(\lambda)$ *pour* $T \to \infty$, *la grandeur*

$$\mathbf{M}\left|\int_0^T \xi(t)\, dt\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda)\, d\lambda$$

ou bien tend vers l'infini, ou bien est bornée. Pour qu'elle soit bornée il faut et il suffit que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda^2} f(\lambda)\, d\lambda < \infty$.

La démonstration de ce lemme et des deux suivants ressemble beaucoup à celle des assertions analogues des lemmes 4 à 6 du chapitre V. Nous ne donnerons donc que la démonstration détaillée du lemme 4.

L e m m e 3. *Pour tout* μ *et* $T \to \infty$, *la fonction* $\gamma(T)$ *tend vers l'infini ou est bornée. Pour qu'elle soit bornée il faut et il suffit que* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)^2}\, d\lambda < \infty$.

L e m m e 4. *Soit* $0 < a < \infty$. *Pour* $T \to \infty$ *ou bien* $\inf_{|\mu| \leqslant a} \gamma(T;\mu) \to \infty$, *ou bien il existe un point* $\theta \in [-a, a]$ *tel que* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\theta)^2}\, d\lambda < \infty$.

La démonstration ressemble beaucoup à celle du cas discret (lemme 6, chapitre V). Notamment, l'égalité $U^\tau \xi(t) = \xi(t+\tau)$ définit dans l'espace hilbertien $H(-\infty, \infty)$ un groupe d'opérateurs unitaires $\{U^\tau\}$. Si

$$\varliminf_{T\to\infty} \inf_{|\mu|\leqslant a} \gamma(T;\mu) < \infty,$$

des raisonnements analogues à ceux de la démonstration du lemme 6 du chapitre V permettent de définir la suite des éléments

$$\zeta_k \in H(-\infty, \infty), \quad \zeta_k = \int_0^{T_k} e^{-it\theta_k} U^t \xi(0)\, dt,$$

faiblement convergeant vers un certain élément $\zeta \in H(-\infty, \infty)$. La suite numérique θ_k converge dans ce cas vers un certain nombre $\theta \in [-a, a]$. Par conséquent, $\lim_{(f)} e^{-i\tau\theta_k}\zeta_k = e^{-i\tau\theta}\zeta$; ici $\lim_{(f)}$ désigne une convergence faible, et τ un nombre réel arbitraire.

D'après le théorème de Riemann-Lebesgue

$$B(s) = \mathrm{M}\xi(t+s)\overline{\xi(t)} = (\xi(t+s), \xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda \underset{|s|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour tous les $h \in H(-\infty, \infty)$

$$\lim_{s\to\infty} (\xi(s), h) = 0, \qquad \lim_{(f)\, s\to\infty} \xi(s) = 0$$

et par conséquent

$$\zeta - e^{-i\theta\tau}U^{\tau}\zeta = \lim_{(f)} (\zeta_h - e^{-i\theta_k\tau}U^{\tau}\zeta_h) =$$

$$= \lim_{(f)} \left(\int_0^{\tau} e^{-i\theta_k t}\xi(t)\,dt + \int_{T_k}^{T_k+\tau} e^{-i\theta_k t}\xi(t)\,dt \right) = \int_0^{\tau} e^{-i\theta t}\xi(t)\,dt. \quad (6.2.4)$$

Construisons un processus stationnaire $\eta(t) = e^{-i\theta t}U^t\zeta$. En vertu de (6.2.4) on a

$$\eta(t) - \eta(t+\tau) = e^{-i\theta t}U^t(\zeta - e^{-i\theta\tau}U^{\tau}\zeta) = \int_t^{t+\tau} e^{-i\theta s}\xi(s)\,ds. \quad (6.2.5)$$

La dernière égalité signifie que le processus $\eta(t)$ est dérivable en moyenne quadratique et que

$$\eta'(t) = -e^{-i\theta t}\xi(t). \quad (6.2.6)$$

Désignons par $f_\eta(\lambda)$, $f_\xi(\lambda)$ les densités spectrales des processus $\eta(t)$, $\xi(t)$. De (6.2.6) on déduit la relation suivante entre f_ξ et f_η:

$$\lambda^2 f_\eta(\lambda) = f_\xi(\lambda+\theta).$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-\theta)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\lambda)\,d\lambda < \infty.$$

Inversement, si $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\theta)^2}\,d\lambda < \infty$, d'après le lemme 3 on a $\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \gamma(T;\theta) < \infty$. Le lemme 4 se trouve donc démontré.

Lemme 5. *Supposons le processus* $\xi(t)$ *complètement régulier. Il existe une fonction entière de carré intégrable de degré fini* $\Gamma(\lambda)$ *telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda)}\,d\lambda < \infty. \quad (6.2.7)$$

La démonstration répète textuellement la première partie de la démonstration du lemme 7 du chapitre V, mais ici il y a lieu d'utiliser le fait que les processus à temps continu ne se prêtent pas à l'interpolation *).

Lemme 6. *Supposons le processus* $\xi(t)$ *complètement régulier. Pour a quelconque,* $0 < a < \infty$, *la densité spectrale* $f(\lambda)$ *du processus*

*) Voir, par exemple, [22], page 183.

$\xi(t)$ peut s'écrire comme suit:

$$f(\lambda) = w(\lambda)\,|P_a(\lambda)|^2, \tag{6.2.8}$$

où $P_a(\lambda)$ est un polynôme algébrique dont les racines (situées à l'intérieur de l'intervalle $[-a, a]$) sont réelles et $w(\lambda)$ est douée de la propriété

$$\liminf_{T} \inf_{|\mu|\leqslant a} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \frac{\sin^2 T\frac{\lambda-\mu}{2}}{(\lambda-\mu)^2} d\lambda = \infty. \tag{6.2.9}$$

Démonstration. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les polynômes $Q(\lambda)$ à racines à l'intérieur de $[-a, a]$ tels que

$$\int_{-a}^{a} \frac{|Q(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

D'après le lemme précédent l'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas vide. (Pour $Q(\lambda)$ on peut prendre un polynôme dont les racines coïncident avec celles de $\Gamma(\lambda)$ se trouvant sur $[-a, a]$.) Soit $Q_a(\lambda)$ celui des polynômes $Q(\lambda) \in \mathcal{F}$ dont le degré est le moindre et le coefficient du terme de degré supérieur est égal à 1. Parmi les polynômes $P(\lambda)$ à racines à l'intérieur de $[-a, a]$ et tels que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{|P(\lambda)|^2} d\lambda < \infty$, il existe un, $P_a(\lambda)$, de degré maximal (fini). En effet, il découle de l'inégalité

$$\left(\int_{-a}^{a} \left|\frac{Q_a(\lambda)}{P(\lambda)}\right| d\lambda\right)^2 \leqslant \int_{-a}^{a} \frac{|Q_a(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda \cdot \int_{-a}^{a} \frac{f(\lambda)}{|P(\lambda)|^2} d\lambda$$

que tous les polynômes $P(\lambda)$ sont des diviseurs du polynôme $Q_a(\lambda)$. Posons maintenant $f(\lambda) = |P_a(\lambda)|^2 w(\lambda)$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

d'où on conclut que $w(\lambda)$ est la densité spectrale d'un processus stationnaire. Les raisonnements ultérieurs coïncident avec ceux qui ont été utilisés lors de la démonstration du lemme 7 du chapitre V et nous les omettrons. Le lemme est démontré.

Lemme 7. *Supposons le processus $\xi(t)$ complètement régulier. Aux points μ, où $\lim_{T} \gamma(T;\mu) = \infty$, la fonction $\gamma(T;\mu)$ peut s'écrire comme $\gamma(T;\mu) = Th(T;\mu)$, où $h(T;\mu)$ est une fonction lentement variable de T, c'est-à-dire que pour tous les $x > 0$ on a*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{h(Tx;\mu)}{h(T;\mu)} = 1.$$

La démonstration ressemble beaucoup à celle des assertions analogues du chapitre V (lemmes 8 à 10) donc nous pouvons omettre certains détails. Il faut montrer que pour tous les $x > 0$

$$\lim_{T} \frac{\gamma(Tx)}{\gamma(T)} = x \tag{6.2.10}$$

(ici et ci-dessous pour abréger l'écriture nous omettons l'argument μ). Tout comme dans le chapitre V nous commencerons par le cas de x entier, puis nous établirons certaines propriétés de la fonction $\gamma(T)$, enfin nous démontrerons (6.2.10) pour x quelconque.

1. x est un nombre entier, $x = k$. Ecrivons $\gamma(kT)$ comme suit

$$\gamma(kT) = \mathbf{M}\,|z_1 + y_1 + \ldots + z_k + y_k|^2,$$

où

$$z_j = \int_{(j-1)T+(j-1)r}^{jT+(j-1)r} e^{-i\mu t}\xi(t)\,dt, \quad j = \overline{1, k},$$

$$y_j = \int_{jT+(j-1)r}^{jT+jr} e^{-i\mu t}\xi(t)\,dt, \qquad j = \overline{1, k-1},$$

$$y_k = -\int_{kT}^{kT+(k-1)r} e^{-i\mu t}\xi(t)\,dt,$$

et $r = r(T)$ est choisi de telle sorte que $r(T) \underset{T\to\infty}{\to} \infty$ mais

$$\frac{\gamma(r)}{\gamma(T)} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \max_{1\leqslant s\leqslant k} \frac{\gamma(sr)}{\gamma(T)} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0\ ^{*)}.$$

Il est facile de voir que

$$\mathbf{M}\,|z_j|^2 = \gamma(T); \quad \mathbf{M}\,|y_i|^2 = \gamma(r), \quad j \leqslant k-1;$$
$$\mathbf{M}\,|y_k|^2 = \gamma((k-1)r).$$

D'où, en reprenant les raisonnements de la page 189 on conclut que

$$\gamma(kT) = k\gamma(T)\left(1 + o\left(k\rho(r) + k\left(\frac{\gamma(r)}{\gamma(T)}\right)^{1/2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + k\left(\frac{\gamma((k+1)r)}{\gamma(T)}\right)^{1/2}\right)\right) = k\gamma(T)(1 + o(1)).$$

Le cas de x entier est donc étudié.

---

*) Comme $\gamma(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda+\mu)\,d\lambda \leqslant T^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda$, on peut poser $r = \ln \gamma(T)$ car alors

$$\gamma(sr) \leqslant k^2 \ln^2 \gamma(T) \int_{\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda.$$

2. x est rationnel, $x = p/q$. On a

$$\lim_T \frac{\gamma\left(\frac{p}{q} T\right)}{\gamma(T)} = \lim_T \frac{\gamma\left(p \frac{T}{q}\right)}{\gamma\left(\frac{T}{q}\right)} \frac{\gamma\left(\frac{T}{q}\right)}{\gamma\left(q \frac{T}{q}\right)} = \frac{p}{q}.$$

3. x est quelconque. Comme à la page 189 on trouve

$$\ln h(T) = o(\ln T)$$

et par conséquent pour tous les $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_T T^{\varepsilon} h(T) = \infty, \qquad \lim_T T^{-\varepsilon} h(T) = 0. \tag{6.2.11}$$

A partir des égalités (6.2.11) et en raisonnant comme à la page 191 on peut montrer facilement que les fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, définies par les relations

$$\psi_1(x) = \underline{\lim}_T \frac{\gamma(Tx)}{\gamma(T)}, \quad \psi_2(x) = \overline{\lim}_T \frac{\gamma(Tx)}{\gamma(T)},$$

sont continues. Donc pour des x rationnels on a $\psi_1(x) = \psi_2(x) = x$ et pour tous les x réels

$$\lim_T \frac{\gamma(Tx)}{\gamma(T)} = x.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 8. *Si* $\gamma_a(T) = \inf_{|\mu| \leqslant a} \gamma(T; \mu) \underset{T \to \infty}{\to} \infty$ *la relation*

$$\lim_T \frac{h(Tx)}{h(T)} = 1 \tag{6.2.12}$$

est vérifiée uniformément pour tous les μ *et* x *tels que* $|\mu| \leqslant a$, $0 < x_0 < x < x_1 < \infty$.

La démonstration répète mot à mot celle du lemme 10 du chapitre V.

§ 3. Démonstration du théorème fondamental sur les conditions nécessaires

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème 2 analogue au théorème 5 du chapitre V.

Théorème 2. *Soit* $\xi(t)$ *un processus complètement régulier de densité spectrale* $f(\lambda)$. *Quel que soit le nombre* a, $0 < a < \infty$, *la fonction* $f(\lambda)$ *peut s'écrire comme suit :*

$$f(\lambda) = |P_a(\lambda)|^2 w_a(\lambda),$$

où $P_a(\lambda)$ *est un polynôme algébrique à racines sur* $[-a, a]$, *et la primitive* $W_a(\lambda)$ *de la fonction* $w_a(\lambda)$ *satisfait à la condition*

$$\omega_W(\delta) = \sup_{|\lambda| \leqslant a} \sup_{|t| \leqslant \delta} \frac{|W_a(\lambda+t) + W_a(\lambda-t) - 2W_a(\lambda)|}{|W_a(\lambda+t) - W_a(\lambda-t)|} \underset{\delta \to 0}{\rightarrow} 0. \quad (6.3.1)$$

Cette condition est analogue à la condition (5.3.2); elle impose à la régularité et à l'ordre des zéros de la densité spectrale $f(\lambda)$ les mêmes restrictions que la condition (5.3.2) au cas discret. En effet, par des raisonnements analogues à ceux de la page 209, on déduit de (6.3.1):

C o r o l l a i r e 1. *La densité spectrale d'un processus complètement régulier n'a pas de discontinuités de première espèce.*

Quelques raisonnements supplémentaires seront nécessaires pour démontrer le

C o r o l l a i r e 2. *L'ordre inférieur d'un zéro quelconque* λ_0 *de la densité spectrale* $f(\lambda)$ *d'un processus complètement régulier est obligatoirement soit égal à zéro, soit à un nombre entier pair. Par conséquent, l'ordre réel d'un zéro quelconque de* $f(\lambda)$ *ne peut être qu'un nombre entier et pair.*

C o r o l l a i r e 3. *Pour les* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\varlimsup_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\varepsilon} = 0.$$

Nous commençons par démontrer l'assertion suivante:
Sous la condition (6.3.1), *toutes les fonctions*

$$h_\mu(x) = h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x w_a(\lambda + \mu)\, d\lambda$$

sont lentement variables pour $x \to 0$, *avec* $\lim_{n \to 0} \frac{h(zx)}{h(x)} = 1$ *uniformément pour tous les* $\mu \in [-a, a]$ et $z \in [s, S]$, $0 < s < S < \infty$.

En effet, si z est un entier, (6.3.1) nous autorise à écrire

$$\frac{\frac{1}{zx} h(zx)}{\frac{1}{x} h(x)} = 1 + o(1).$$

Par conséquent, $\lim \frac{h(zx)}{h(x)} = 1$ pour tous les z rationnels. La dernière partie de la démonstration coïncide avec la fin de la démonstration des lemmes 7 et 8; de plus il y a lieu d'utiliser l'inégalité évidente suivante: pour $\varepsilon < 1/q$

$$\int_0^{\varepsilon x} w_a(\lambda + \mu)\, d\lambda \leqslant \int_0^{x/q} w_a(\lambda + \mu)\, d\lambda.$$

Montrons maintenant que l'ordre inférieur ($k(\lambda_0)$) d'un zéro quelconque λ_0 de la fonction $w_a(\lambda)$ est d'après le théorème 2 égal à zéro. Si $k(\lambda_0) > \varepsilon > 0$ au voisinage du point λ_0, on a $w_a(\lambda) < |\lambda - \lambda_0|^{\varepsilon/2}$ et par conséquent

$$h_{\lambda_0}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x w_a(\lambda + \lambda_0)\, dx < x^{\varepsilon/2},$$

mais c'est impossible car la fonction $h(x)$ est lentement variable et pour tous les $\varepsilon > 0$ on a $\lim\limits_{x \to 0} h(x)\, x^{-\varepsilon} = \infty$.

Le corollaire 2 est démontré. D'une manière analogue on démontre le corollaire 3.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2. Elle part des idées analogues à celles du théorème 5 du chapitre V. Tout comme le résultat mentionné, le théorème 2 est une proposition du type taubérien, c'est-à-dire que l'on parle du comportement local de $W_a(\lambda)$ en se basant sur les propriétés de la fonction

$$\gamma(T\,;\,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T \dfrac{\lambda-\mu}{2}}{(\lambda-\mu)^2}\, dW_a(\lambda).$$

Préalablement, utilisant le lemme 6 et le lemme 9 qui suit débarrassons-nous des zéros de $f(\lambda)$.

Lemme 9. *Si $f(\lambda)$ est la densité spectrale d'un processus complètement régulier $\xi(t)$, tous les pôles et les zéros de la fonction rationnelle $R(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ sont réels, et la fonction w est telle que $w = |R|^2 f \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$, alors $w(\lambda)$ est également la densité spectrale d'un processus stationnaire $\eta(t)$, de plus*

$$\rho(\tau\,;\,w) \leqslant \rho(\tau\,;\,f).$$

Démonstration. Si les fonctions φ, ψ appartiennent à la sphère unitaire de l'espace $L^+(w)$, φ/R, $\psi/\overline{R}$ se trouvent dans la sphère unitaire de $L^+(f)$. Donc

$$\rho(\tau\,;\,w) = \sup_{\varphi,\psi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda\tau} w(\lambda)\, d\lambda \right| =$$

$$= \sup_{\varphi,\psi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{R(\lambda)}\, \frac{\psi(\lambda)}{\overline{R(\lambda)}}\, e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \rho(\tau\,;\,f).$$

D'une manière analogue au § 4 du chapitre V nous allons supposer (d'ici à la fin de la démonstration du lemme 12) que $f(\lambda)$ est la

densité spectrale d'une suite complètement régulière telle que

$$\lim_{T} \inf_{|\mu| \leqslant a} (\gamma(T\,;\,\mu) = \infty.$$

L e m m e 10. *Soit $a(\lambda)$ une fonction paire à dérivée troisième bornée, s'annulant à l'extérieur de l'intervalle* $[-1, 1]$. *Dans ce cas pour $T \to \infty$ on a uniformément en $|\mu| \leqslant a$*

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda + \mu)\, a(T\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} a(\lambda)\, d\lambda \cdot h(T)\,(1 + o(1)), \quad (6.3.2)$$

où pour simplifier l'écriture, on a désigné $h(T\,;\,\mu)$ par $h(T)$.

La démonstration répète en fait celle du lemme 12 du chapitre V. Introduisons la transformée de Fourier $A(z)$ de la fonction $a(\lambda)$, et pour $\varepsilon > 0$ donné définissons les nombres s, δ et l'ensemble B tout comme à la page 194. Ecrivons le premier membre de (6.3.2):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\int_{1+\delta}^{s} z\,[h(T(z+1)) + h(T(z-1) - 2h(Tz)]\, A(z)\, dz +$$

$$+ \int_{1+\delta}^{s} [h(T(z+1)) - h(T(z-1))]\, A(z)\, dz +$$

$$+ \int_{\delta}^{1-\delta} z\,[h(T(z+1)) - h(T(z-1)) - 2h(Tz)]\, A(z)\, dz +$$

$$+ \int_{\delta}^{1-\delta} [h(T(z+1)) + h(T(z-1))]\, A(z)\, dz + R(T) \Big].$$

où $|R(T)| \leqslant \varepsilon h(T)$.

D'où et du lemme 8, on déduit que pour $T \to \infty$ on a uniformément en $|\mu| \leqslant a$

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f(\lambda + \mu)\, a(T\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} (1 - z)\, A(z)\, dz \cdot h(T)\,(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} a(\lambda)\, d\lambda\,(1 + o(1)). \quad (6.3.3)$$

Le lemme est démontré.

L e m m e 11. *Soit $a(\lambda)$ une fonction dérivable trois fois, à dérivée troisième bornée, s'annulant à l'extérieur de l'intervalle* [—1, 1]. *Pour $T \to \infty$ on a alors uniformément en $|\mu| \leqslant a$*

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}f(\lambda+\mu)\,a(T\lambda)\,d\lambda = o(h(T)), \qquad (6.3.4)$$

où comme précédemment $h(T) = h(T;\mu)$.

La démonstration de ce lemme est même un peu plus simple que dans le cas discret (lemme 13 du chapitre V). En désignant de nouveau par $A(z)$ la transformée de Fourier de la fonction $a(\lambda)$, nous pouvons écrire l'intégrale à estimer comme suit :

$$\frac{1}{T}\int_{B}A(z)\,dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}\sin T\lambda z f(\lambda+\mu)\,d\lambda + R(T),$$

où $|R(T)| \leqslant \varepsilon h(T)$, et B est l'ensemble $\{z:\ \delta < z < 1-\delta\ \ 1+\delta < z < s\}$. Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} = \frac{1}{4}\left|\int_0^T e^{i\lambda\tau}\,d\tau\right|^2.$$

Comme

$$\sin T\lambda z = \frac{1}{2i}\left(e^{iT\lambda z} - e^{-iT\lambda z}\right),$$

pour tous les z tels que $Tz > T + T_0$ les produits de $\exp\{iT\lambda z\}$, $\exp\{-iT\lambda z\}$ par $\dfrac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}$ s'écriront comme suit

$$e^{iT_0\lambda}\varphi_z^+(\lambda), \quad e^{-iT_0\lambda}\varphi_z^-(\lambda),$$

où $\varphi_z^+(\lambda)$, $\varphi_z^-(\lambda)$ appartiennent aux espaces $\mathscr{H}^1$ respectivement des demi-plans supérieur et inférieur. Vu la régularité complète *) on a

$$\frac{1}{T}\left|\int_{B\cap\{Tz>T+T_0\}}A(z)\,dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}\sin T\lambda z f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| =$$

$$= \frac{1}{T}\left|\int_{B\cap\{Tz>T+T_0\}}A(z)\,dz\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{iT_0\lambda}\varphi_z^+(\lambda) + e^{-iT_0\lambda}\varphi_z^-(\lambda)\right]\times\right.$$

$$\left.\times f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right| \leqslant \rho(T_0)\int_{-\infty}^{\infty}|A(z)|\,dz\cdot\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\varphi_z^+(\lambda)| +\right.$$

$$\left.+ |\varphi_z^-(\lambda)|\right) f(\lambda+\mu)\,d\lambda \leqslant \varepsilon h(T) \quad (6.3.5)$$

si seulement T_0 est suffisamment grand.

*) Tout comme $f(\lambda)$, pour μ quelconque $f(\mu+\lambda) \doteq f_\mu(\lambda)$ est également la densité spectrale d'un processus complètement régulier de même coefficient de régularité.

Il nous reste à examiner le comportement de l'intégrale étudiée dans le domaine $\{\delta < z < 1-\delta\}$. Faisons certaines transformations dans l'expression sous le signe somme dans (6.3.5). On a

$$\frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} e^{iT\lambda z} = \frac{1}{4} e^{iT\lambda z} \int_0^T e^{i\tau\lambda}\, d\tau \int_0^T e^{-i\tau\lambda}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^T e^{i\tau\lambda}\, d\tau \int_{-Tz}^{T(1-z)} e^{-i\tau\lambda}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \Bigg[\int_0^T e^{i\lambda\tau}\, d\tau \int_0^{Tz} e^{i\lambda\tau}\, d\tau + \left| \int_0^{T(1-z)} e^{i\tau\lambda}\, d\tau \right|^2 +$$

$$+ \int_{T(1-z)}^{T} e^{i\tau\lambda}\, d\tau \int_0^{T(1-z)} e^{-i\tau\lambda}\, d\tau \Bigg] \quad (6.3.6)$$

(rappelons que maintenant $\delta < z < 1-\delta$). D'une manière analogue

$$\frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} e^{-iT\lambda z} = \frac{1}{4} \Bigg[\int_0^T e^{-i\tau\lambda}\, d\tau \int_0^{Tz} e^{-i\tau\lambda}\, d\tau +$$

$$+ \left| \int_0^{T(1-z)} e^{i\tau\lambda}\, d\tau \right|^2 + \int_{T(1-z)}^{T} e^{-i\tau\lambda}\, d\tau \int_0^{T(1-z)} e^{i\tau\lambda}\, d\tau \Bigg]. \quad (6.3.7)$$

En retranchant (6.3.7) de (6.3.6) on obtient finalement

$$\frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} \sin T\lambda z = [\Phi_1(\lambda\,;\, z) - \Phi_1(-\lambda\,;\, z)] + [\Phi_2(\lambda\,;\, z) + \Phi_2(-\lambda\,;\, z)],$$

où

$$\Phi_1(\lambda\,;\, z) = \frac{1}{4} \int_0^T e^{i\lambda\tau}\, d\tau \int_0^{Tz} e^{i\lambda\tau}\, d\tau,$$

$$\Phi_2(\lambda\,;\, z) = \frac{1}{4} \int_{T(1-z)}^{T} e^{i\lambda\tau}\, d\tau \int_0^{T(1-z)} e^{-i\lambda\tau}\, d\tau.$$

Cherchons à estimer les intégrales $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(\pm\lambda\,;\, z) \times$ $\times f(\lambda+\mu)\, d\lambda$, $i = 1, 2$. Les calculs sont ici même un peu plus simples que dans le cas discret.

1. Estimation de $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\lambda\,;\, z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda$.

Ecrivons $\Phi_1(\lambda;\ z)$ comme la somme $\Phi_{11}(\lambda;\ z)+\Phi_{12}(\lambda;\ z)$, où

$$\Phi_{11}(\lambda;\ z)=\frac{1}{4}\int\limits_{T(1-z)}^{T(1-z)+\sqrt{T}} e^{i\lambda\tau}\,d\tau \int\limits_{0}^{T(1-z)} e^{i\lambda\tau}\,d\tau,$$

$$\Phi_{12}(\lambda;\ z)=\frac{1}{4}\int\limits_{T(1-z)+\sqrt{T}}^{T} e^{i\lambda\tau}\,d\tau \int\limits_{0}^{T(1-z)} e^{i\lambda\tau}\,d\tau.$$

Il est évident que

$$|\Phi_{11}(\lambda;\ z)|=\left|\frac{\sin\frac{\lambda\sqrt{T}}{2}}{\lambda}\,\frac{\sin\frac{T(1-z)\lambda}{2}}{\lambda}\right|. \qquad (6.3.8)$$

La fonction $\Phi_{12}(\lambda;\ z)$ peut s'écrire

$$\Phi_{12}(\lambda;\ z)=e^{i\lambda\sqrt{T}}\varphi_1^+(\lambda)\,\varphi_2^+(\lambda), \qquad (6.3.9)$$

où

$$|\varphi_1^+(\lambda)|=\left|\frac{\sin(Tz-\sqrt{T})\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right|,$$

$$|\varphi_2^+(\lambda)|=\left|\frac{\sin T(1-z)\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right| \text{ et } \varphi_1^+,\ \varphi_2^+\in\mathscr{H}_2^+.$$

Puis, en utilisant la propriété (6.2.12) des fonctions $h(T)$, l'égalité (6.3.8) et l'inégalité de Schwartz on obtient l'estimation

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{11}(\lambda;\ z)|\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant T^{-1/4}[h(\sqrt{T})]^{1/2}[h(T)]^{1/2}=o(h(T)), \qquad (6.3.10)$$

qui ne dépend pas de z, $\delta<z<1-\delta$.

La condition de régularité complète, compte tenu de (6.3.9), donne

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{12}(\lambda;\ z)\,f(\lambda+\mu)\,d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant\rho(\sqrt{T})\,[h(Tz-\sqrt{T})\,h(T(1-z))]^{1/2}. \qquad (6.3.11)$$

D'après le lemme 7 on a

$$\lim_{T\to\infty}\frac{h(Tz-\sqrt{T})}{h(T)}=1, \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{h(T(1-z))}{h(T)}=1$$

uniformément en z, $\delta < z < 1-\delta$, de sorte que, uniformément en μ et z, $\delta \leqslant z \leqslant 1-\delta$, on obtient

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(\lambda\,;\; z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda \right| = o(h(T)). \tag{6.3.12}$$

Les estimations (6.3.10), (6.3.12) permettent d'affirmer que uniformément en $|\mu| \leqslant a$, z, $\delta \leqslant z \leqslant 1-\delta$, on a

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\lambda\,;\; z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda = o(h(T)). \tag{6.3.13}$$

2. Estimation de $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\lambda\,;\; z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda$.

Ecrivons Φ_2 aussi comme la somme

$$\Phi_2(\lambda\,;\; z) = \Phi_{21}(\lambda; z) + \Phi_{22}(\lambda\,;\; z),$$

où maintenant

$$\begin{gathered} \Phi_{21}(\lambda\,;\; z) = \frac{1}{4} \int_{T(1-z)}^{T(1-z)+\sqrt{T}} e^{i\lambda\tau}\, d\tau \int_{0}^{T(1-z)} e^{-i\lambda\tau}\, d\tau, \\ \Phi_{22}(\lambda\,;\; z) = \int_{T(1-z)+\sqrt{T}}^{T} e^{i\lambda\tau}\, d\tau \int_{0}^{T(1-z)} e^{-i\lambda\tau}\, d\tau = e^{i\lambda\sqrt{T}} \varphi_2^+(\lambda)\, \psi_2^+(\lambda), \end{gathered} \tag{6.3.14}$$

et φ_2^+, $\psi_2^+ \in \mathscr{H}^2$ dans le demi-plan supérieur. A partir de (6.3.14) on obtient tout comme (6.3.10) et (6.3.12)

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{21}(\lambda\,;\; z)|\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant T^{-1/4} \left[h\left(\sqrt{T}\right) h\left(T(1-z)\right)\right]^{1/2} = o(h(T)), \tag{6.3.15}$$

$$\frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}(\lambda\,;\; z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda \right| \leqslant$$
$$\leqslant \rho\left(\sqrt{T}\right) \left[h\left(Tz-\sqrt{T}\right) h\left(T(1-z)\right)\right]^{1/2} = o(h(T)), \tag{6.3.16}$$

de sorte que, uniformément en $|\mu| \leqslant a$, z, $\delta \leqslant z \leqslant 1-\delta$, on a

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\lambda\,;\; z) f(\lambda+\mu)\, d\lambda = o(h(T)). \tag{6.3.17}$$

De même uniformément en μ et z on a

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(-\lambda;\ z)\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda = o(h(T)),$$
$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(-\lambda;\ z)\, f(\lambda+\mu)\, d\lambda = o(h(T)). \tag{6.3.18}$$

Ces estimations s'obtiennent tout comme (6.3.13), (6.3.17), seulement dans les formules (6.3.9), (6.3.14) les développements sont du type $e^{-i\lambda\sqrt{T}}\varphi^-(\lambda)\psi^-(\lambda)$, où maintenant φ^-, $\psi^-\in\mathscr{H}^2$ dans le demi-plan inférieur.

En réunissant les estimations obtenues, on trouve finalement que, uniformément en $|\mu|\leqslant a$ on a

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}\, f(\lambda+\mu)\, a(T\lambda)\, d\lambda = o(h(T)).$$

Le lemme est démontré.

Lemme 12. *Soit $a(\lambda)$ une fonction à variation bornée s'annulant à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 1]$. Pour $T\to\infty$ on a uniformément en $|\mu|\leqslant a$*

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}\, f(\lambda+\mu)\, a(T\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \frac{h(T)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\, a(\lambda)\, d\lambda\,(1+o(1)). \tag{6.3.19}$$

La démonstration est complètement analogue à celle du lemme 14 du chapitre V.

Soit $f(\lambda)$ la densité spectrale d'un processus complètement régulier. D'après le lemme 6 on peut écrire $f(\lambda)$ sous la forme $w_a(\lambda)\,|P_a(\lambda)|^2$, où

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_a(\lambda)\, d\lambda < \infty, \text{ et } \lim_{T}\ \inf_{|\mu|\leqslant a}\ \gamma(T;\ \mu;\ w_a) = \infty.$$

En vertu du lemme 9, $w_a(\lambda)$ est la densité spectrale d'un processus complètement régulier. Puis en utilisant le lemme 12 on

obtient (voir page 204) :

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{1/T} w_a(\lambda+\mu)\,d\lambda - \frac{1}{T}\int_{-1/T}^{0} w_a(\lambda+\mu)\,d\lambda = \\ = o\left(\frac{1}{T}\int_{-1/T}^{1/T} w_a(\lambda+\mu)\,d\lambda\right), \quad (6.3.20)$$

uniformément en $|\mu| \leqslant a$, ce qui est équivalent à (6.3.1). Ce résultat achève la démonstration du théorème 2.

§ 4. Comportement de la densité spectrale sur toute la droite

Le théorème que nous venons de démontrer ne donne aucuns renseignements sur le comportement de la densité spectrale $f(\lambda)$ d'un processus complètement régulier pour $\lambda \to \infty$. Il est intuitivement clair que $f(\lambda)$ ne peut par exemple décroître trop rapidement. Un processus complètement régulier étant linéairement régulier, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty. \quad (6.4.1)$$

D'un autre côté, c'est en fait la seule limitation imposée à la vitesse de décroissance de $f(\lambda)$ pour $\lambda \to \infty$. En effet, si $\Gamma(\lambda)$ est une fonction entière de carré intégrable de degré fini, le processus $\xi(t)$ de densité spectrale $f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2$ est complètement régulier (ce qui découle du théorème 1).

Cependant, si on arrive à décomposer $f(\lambda)$ en facteurs dont un est $\Gamma(\lambda)$ du type mentionné ci-dessus et l'autre, $f(\lambda)(\Gamma(\lambda))^{-1} = w(\lambda)$, est pour des λ grands supérieurement et inférieurement borné ($m \leqslant w \leqslant M$), on peut tirer certaines conclusions sur le comportement de $w(\lambda)$ à l'infini (plus exactement, sur le comportement uniforme de $w(\lambda)$ sur toute la droite).

Pour la formulation exacte du résultat il y a lieu d'introduire une classe spéciale de fonctions entières que nous définissons ci-dessous.

Dans la théorie des fonctions entières, un rôle important revient à la classe A des fonctions entières de degré fini $\Gamma(z)$, $z = \lambda + i\mu$, dont les zéros z_i satisfont à l'inégalité

$$\sum_j |\operatorname{Im} 1/z_j| < \infty. \quad (6.4.2)$$

Nous aurons besoin des fonctions entières dont les zéros satisfont à une condition plus rigoureuse que (6.4.2).

Désignons par A^* la classe des fonctions entières $\Gamma(z)$, $z = \lambda + i\mu$, *de degré fini, dont les zéros z_j satisfont à l'inégalité*

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} \sum_j \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_j - \lambda} \right| < \infty. \tag{6.4.3}$$

La sommation s'étend à tous les zéros non réels z_j de la fonction Γ.

Théorème 3. *Supposons que la densité spectrale $f(\lambda)$ d'un processus stationnaire complètement régulier $\xi(t)$ puisse s'écrire comme*

$$f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2 w(\lambda),$$

où Γ est une fonction entière de carré sommable de la classe A^* et la fonction w satisfait aux inégalités

$$0 < m \leqslant \inf_\lambda w(\lambda) \leqslant \sup_\lambda w(\lambda) \leqslant M < \infty.$$

La primitive $W(\lambda)$ de la fonction $w(\lambda)$ satisfait alors à la condition

$$\omega_W(\delta) = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} \sup_{|t|\leqslant\delta} \frac{|W(\lambda+t) + W(\lambda-t) - 2W(\lambda)|}{|W(\lambda+t) - W(\lambda-t)|} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0. \tag{6.4.4}$$

Le schéma de la démonstration est le suivant. On montre d'abord qu'une fonction complètement régulière divisée par une fonction de la classe A^* reste complètement régulière (pour la terminologie voir § 1). Puis par les méthodes du § 3 on étudie la fonction complètement régulière w, pour laquelle on a de toute évidence $\inf \gamma(T; \mu; w) \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$.

Notons que sans restreindre la généralité on peut considérer que tous les zéros de la fonction Γ se trouvent dans le demi-plan inférieur fermé. En effet, $|\Gamma|^2$ est, sur la droite réelle, la valeur d'une fonction entière non négative de la classe A, or d'après le théorème de Achieser *) une telle fonction peut s'écrire comme $|\varphi(\lambda)|^2$, où $\varphi(z)$ est une fonction entière de la classe A à racines dans le demi-plan inférieur. On peut facilement voir que $\varphi \in A^*$ et en cas de besoin on peut remplacer Γ par φ sans que la densité spectrale f change. Il est également évident que la fonction $\Gamma(z)$ est extérieure dans le demi-plan supérieur.

Posons ensuite $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$ et introduisons la fonction méromorphe $\chi(z) = \frac{\bar{\Gamma}(z)}{\Gamma(z)}$. Ecrivons la fonction $\Gamma(z)$ comme un produit infini, soit

$$\Gamma(z) = z^p e^{az+b} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}.$$

*) Voir [16], page 567.

On déduit de la condition (6.4.3) que

$$\chi(z) = \alpha e^{i\beta z} \prod_j \left(1 - \frac{z}{\bar{z}_j}\right)\left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{-1}, \qquad (6.4.5)$$

où β est un nombre réel, et $|\alpha| = 1$.

L e m m e 13. *Soit* $\Gamma(z) \in A^*$ *une fonction entière avec* $\frac{\ln|\Gamma|}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1$. *La fonction méromorphe* $\chi(z)$ *est alors analytique dans une certaine bande* $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $\delta > 0$, *et est bornée dans une bande quelconque* $|\operatorname{Im} z| < \delta' < \delta$.

D é m o n s t r a t i o n. Sans restreindre la généralité on peut poser $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Soit $z_j = \alpha_j + i\beta_j$, en vertu de (6.4.3) on a

$$\sup_\lambda \sum \frac{|\beta_j|}{(\lambda-\alpha_j)^2+\beta_j^2} = \sup_\lambda \sum \left|\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - z_j}\right| < \infty,$$

et par conséquent $\delta = \inf |\beta_j| > 0$, où l'infimum est pris sur tous les zéros non réels z_j (si tous les zéros de $\Gamma(z)$ sont réels on doit poser par définition $\delta = \infty$).

Que la fonction $\chi(z)$ est analytique dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \delta$ est évident. Supposant $\delta' < \delta$ montrons que $|\chi(z)|$ est bornée dans $|\operatorname{Im}(z)| < \delta'$. Vu (6.4.3), dans la bande mentionnée on a

$$|\chi(z)|^2 \leqslant \prod_j \left(1 + \frac{4|\beta_j \mu|}{(\alpha_j-\lambda)^2+(\beta_j-\mu)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{4|\mu| \sum_j \frac{|\beta_j|}{(\alpha_j-\lambda)^2+(\beta_j-\mu)^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{4\delta\left(1-\frac{\delta'}{\delta}\right)^2 \sup_\lambda \sum_j \frac{|\beta_j|}{(\alpha_j-\lambda)^2+\beta_j^2}\right\} = M_{\delta'} < \infty.$$

L e m m e 14. *Dans les conditions du théorème* 3 *la fonction* $w(\lambda)$ *est complètement régulière.*

D é m o n s t r a t i o n. Du lemme 13 et des théorèmes sur l'approximation des fonctions analytiques bornées *) il découle qu'il existe des fonctions entières $\Phi_\sigma(\lambda)$ de degré fini $\leqslant \sigma$ telles que

$$\|\chi - \Phi_\sigma\|^{(\infty)} = O(e^{-\sigma\delta'}), \quad \delta' < \delta.$$

Pour des σ grands, toutes les fonctions Φ_σ sont uniformément bornées, par exemple $|\Phi_\sigma(\lambda)| \leqslant 2$. Il est facile de voir que $e^{i\sigma\lambda}\Phi_\sigma \in \mathscr{H}^\infty$ dans le demi-plan supérieur.

Supposons maintenant que φ, ψ sont des fonctions quelconques de la sphère unitaire de l'espace $L^+(w)$, on a alors $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^2$. Par conséquent les fonctions $\varphi_1 = \varphi/\Gamma$, $\psi_1 = \psi/\Gamma$ appartiendront à la

*) Voir [25], page 317.

sphère unitaire de $L^+(f)$. Enfin $e^{i\sigma\lambda}\Phi_\sigma\varphi_1 \in L^+(f)$, donc pour $\sigma = \tau/2$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,w(\lambda)\,d\lambda \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\varphi_1(\lambda)\,\psi_1(\lambda)\,\chi(\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau/2}\,[e^{i\lambda\tau/2}\Phi_\sigma(\lambda)\,\varphi_1(\lambda)]\,\psi_1(\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda \right| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(\lambda)\,\psi_1(\lambda)|\,|\chi(\lambda)-\Phi_\sigma(\lambda)|\,f(\lambda)\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho(\tau/2) + \|\chi - \Phi_\sigma\|^{(\infty)}.$$

D'où on déduit

$$\rho(\tau, w) \leqslant 2\rho(\tau/2) + O(e^{-\tau\delta'/2}),\ \ \delta' < \delta,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Ce qui reste à démontrer du théorème 3 se prouve exactement comme dans le théorème 2. En effet, par la condition du théorème

$$\inf \gamma(T;\ x;\ w) \geqslant \frac{m\pi}{2} T \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

De plus les fonctions du type $\int_0^\alpha e^{it\lambda}\,dt$ sont des éléments de $L^+(w)$. Par conséquent, les démonstrations des lemmes 7, 8, 10 à 12 restent valables. Dans tous ces lemmes on peut de plus poser $a = \infty$.

La condition (6.4.4) signifie grossièrement que le rapport $\left|\frac{w'(\lambda)}{w(\lambda)}\right|$ est borné ou, d'une manière plus générale, la continuité uniforme de $\ln w(\lambda)$ sur tout l'axe (voir le paragraphe suivant). Cette condition peut ne pas être satisfaite même pour des fonctions très lisses. Considérons l'exemple suivant.

E x e m p l e. Supposons que le processus $\xi(t)$ ait pour densité spectrale

$$f(\lambda) = (\sin^2\lambda^2 + 1)\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^{2p},$$

où p est un nombre entier positif quelconque. Il est facile de voir que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty$ de sorte que le processus $\xi(t)$ est régulier. Cependant il n'est pas complètement régulier, bien que sa densité

spectrale soit analytique sur tout le plan de la variable complexe $z = \lambda + \varepsilon\mu$ et que ses zéros coïncident sur l'axe réel avec les zéros de la fonction entière de degré fini $\Gamma(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{2p}$.

En effet, comme la fonction $\Gamma(z) \in A^*$ elle n'a que des zéros réels. D'après le théorème 3 la fonction $w(\lambda) = \sin^2 \lambda^2 + 1$ doit satisfaire à la condition (6.4.4). Cependant

$$\frac{|W(\lambda+t)+W(\lambda-t)-2W(\lambda)|}{W(\lambda+t)-W(\lambda-t)} \geqslant \frac{1}{2t}\left|\int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} [\sin^2 s^2 - \sin^2 (s-t)^2]\, ds\right| =$$

$$= \frac{1}{2t}\left|\int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} \sin t\,(2s-t) \sin [s^2+(s-t)^2]\, ds\right|. \qquad (6.4.6)$$

Posons dans (6.4.6) $\lambda = \frac{\pi}{4t}$. On a alors pour $\lambda \leqslant s \leqslant \lambda + t$ pour $t \to 0$

$$\sin t\,(2s - t) = 1 + O(t^2),$$
$$\sin (s^2 + (s - t)^2) = -\cos 2s^2 + O(t^2).$$

Par conséquent

$$\frac{|W(\lambda+t)+W(\lambda-t)-2W(\lambda)|}{W(\lambda+t)-W(\lambda-t)} \geqslant \frac{1}{2t}\left|\int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} \cos 2s^2\, ds\right| + O(t^2).$$

Puis

$$\int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} \cos(2s^2)\, ds = \int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} \frac{d \sin(2s^2)}{s} = \frac{\sin 2(\lambda+t)^2}{\lambda+t} - \frac{\sin 2\lambda^2}{\lambda} +$$
$$+ \int\limits_{\lambda}^{\lambda+t} \frac{\sin 2s^2}{s^2}\, ds = -\frac{2}{\lambda} \sin \frac{\pi^2}{8t^2} + O(|t|^3)$$

et finalement

$$\sup_{\lambda} \frac{|W(\lambda+t)+W(\lambda-t)-2W(\lambda)|}{W(\lambda+t)-W(\lambda-t)} \geqslant \frac{4}{\pi}\left|\sin \frac{\pi^2}{8t^2}\right| + O(t^2) \not\to 0.$$

Nous avons ainsi établi que le processus $\xi(t)$ n'est pas complètement régulier.

§ 5. Conditions suffisantes

L'un des critères de régularité complète est donné par le théorème suivant qui est en quelque sorte l'inversion du théorème 3.

Théorème 4. *Supposons que la densité spectrale $f(\lambda)$ du processus stationnaire $\xi(t)$ admette la représentation*

$$f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2 w(\lambda),$$

où Γ *est une fonction entière de carré sommable, de degré fini non supérieur à* σ *et la fonction* w *est douée des propriétés suivantes:*

1) $0 < m \leqslant w(\lambda) \leqslant M < \infty$;

2) $\sum_n \omega_W^2(2^{-n}) < \infty$; *ici comme ci-dessus on a*

$$\omega_W(\delta) = \sup_\lambda \sup_{|t| \leqslant \delta} \frac{|W(\lambda+t)+W(\lambda-t)-2W(\lambda)|}{|W(\lambda+t)-W(\lambda-t)|},$$

W *désignant la primitive de* w.

Le processus $\xi(t)$ *est alors complètement régulier avec*

$$\rho(\tau) \leqslant C\left(\frac{M}{m}\right)^3 \left(\sum_1^\infty \omega_W^2\left(\frac{1}{\tau-2\sigma}2^{-(n-1)}\right)\right)^{1/2},$$

où C *est une constante absolue.*

Nous ne donnerons pas la démonstration car elle ne diffère que par la technique de la démonstration du cas discret correspondant (théorème 6 du chapitre V).

Théorème 5. *Supposons que la densité spectrale* $f(\lambda)$ *du processus* $\xi(t)$ *admette la représentation* $f(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2 w(\lambda)$, *où*

1) Γ *est une fonction entière bornée de degré fini non supérieur à* σ;

2) *la fonction* $\ln w(\lambda)$ *est uniformément continue sur l'intervalle* $(-\infty, \infty)$, c'est-à-dire que $\sup_{\lambda, |h| \leqslant s} \left|\ln \frac{w(\lambda+h)}{w(\lambda)}\right| = \omega(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$;

3) $\int_1^\infty \frac{\omega(s)}{s^2} ds < \infty$.

Le processus $\xi(t)$ *est alors complètement régulier avec*

$$\rho(\tau) \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\tau-2\sigma}\right), \quad \tau > 2\sigma, \tag{6.5.1}$$

où la constante C *dépend de* w.

Vu le lemme 1, il suffit de démontrer la régularité complète de la fonction $w(\lambda)$. De l'inégalité $|\ln w(\lambda)| \leqslant |\ln w(0)| + \omega(|\lambda|)$ et de la condition 3) du théorème on déduit $\frac{\ln w}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1$. Il reste à estimer $\rho(\tau; w)$. Cette estimation est basée sur le lemme fondamental suivant.

Lemme 15. *Dans les conditions du théorème* 5 *pour* $r > 0$ *quelconque on peut trouver une fonction* $\Phi_r(\lambda)$ *non négative telle que*

1) *pour tous les* $\varphi, \psi \in L^+(w)$ *les fonctions*

$$\varphi\Phi_r^{1/2}, \quad \psi\Phi_r^{1/2} \in L^2(-\infty, \infty),$$

et si de plus $\tau > r$, *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\psi(\lambda) e^{i\lambda\tau}\Phi_r(\lambda)\, d\lambda = 0; \tag{6.5.2}$$

2) *pour tous les* λ, $-\infty < \lambda < \infty$, *on a*

$$|w(\lambda) - \Phi_r(\lambda)| \leqslant C_1\omega(1/r)\, w(\lambda). \qquad (6.5.3)$$

En remettant au plus tard la démonstration du lemme, montrons comment on en déduit l'inégalité (6.5.1). Soient $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ des fonctions quelconques de la sphère unitaire de l'espace $L^+(w)$. D'après le lemme fondamental, pour tous les $\tau > r$ on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda \right| =$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)[w(\lambda)-\Phi_r(\lambda)]\,d\lambda \right| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\omega(1/r)\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|\,|\psi(\lambda)|\,w(\lambda)\,d\lambda \leqslant C_1\omega(1/r).$$

Par conséquent $\rho(\tau) \leqslant C_1\omega(1/r)$ et la référence au lemme 1 démontre l'inégalité (6.5.1).

Revenons au lemme 15. Définissons le nombre α par l'égalité

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n^2}.$$

Selon la condition 3) du théorème 5 la série définissant α est convergente. Posons ensuite $a_k = \dfrac{\omega(n)}{2\alpha n^2}$,

$$k(x) = \frac{\sin^4 \frac{x}{8}}{\left(\frac{x}{8}\right)^r} \prod_1^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{a_k x}{2}}{\left(\frac{a_k x}{2}\right)^2}$$

et définissons le noyau de Martchenko*) $K(x)$ en posant

$$K(x) = k(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx\right)^{-1}.$$

Les fonctions cherchées $\Phi_r(\lambda)$ sont maintenant données par l'égalité

$$\Phi_r(\lambda) = r\int_{-\infty}^{\infty} K(rx)\,w(\lambda - x)\,dx.$$

Pour démontrer que $\Phi_r(\lambda)$ satisfont à toutes les conditions du lemme 15, voyons préalablement les propriétés des noyaux $K(x)$.

---

*) Ces noyaux ont été introduits par V. Martchenko dans l'article *Sur certaines questions de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel* (en russe), III, Rapports à l'association mathématique de Kharkov, **XXII** (1950).

L e m m e 16. *Les noyaux $K(x)$ sont doués des propriétés suivantes* :

1) *$K(x)$ est une fonction entière de carré intégrale de degré fini* $\left(\leqslant 1/2 + \sum \alpha_k \leqslant 1\right)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1$;

3) *pour $r > 0$ quelconque*

$$|K(rx)| \leqslant M_r e^{-\omega(x)} \frac{\sin^4 \frac{rx}{8}}{\left(\frac{rx}{8}\right)^4}, \qquad (6.5.4)$$

où la constante M_r ne dépend que de r.

Les deux premières propriétés sont évidentes. Pour démontrer la dernière remarquons tout d'abord que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\omega(x)}{x} = 0$. En effet, de la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\, dx$ découle que $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{\omega(x)}{x} < \infty$. Après intégration par parties on obtient l'égalité

$$\int\limits_1^x \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy = \int\limits_1^x \frac{d\omega(y)}{y} - \frac{\omega(x)}{x} + \omega(1),$$

entraînant $\varliminf\limits_{x} \int\limits_1^x \frac{d\omega(y)}{y} < \infty$. La fonction $\omega(x)$ n'étant pas décroissante, la dernière condition entraîne la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} \frac{d\omega(y)}{y}$. Par conséquent, il existe une limite $\lim \frac{\omega(x)}{x}$ qui, en vertu de la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\, dx$, est égale à zéro.

Sans restreindre la généralité on peut considérer que $\lim\limits_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$ (dans le cas contraire l'inégalité (6.5.4) est triviale). D'après $x > 0$ donné, on peut prendre un nombre N tel que $N \leqslant \omega(x) < N + 1$. On a alors

$$\prod_1^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{a_k x r}{2}}{\left(\frac{a_k x r}{2}\right)^2} \leqslant \prod_1^{N} \left(\frac{2}{a_k x}\right)^2 = \frac{2^{2N}(N\,!)^4}{x^{2N} \prod\limits_1^N \omega^2(k)} \cdot \frac{(2\alpha)^{2N}}{r^{2N}}.$$

La formule de Stirling pour des x grands donne

$$\frac{(N\,!)^4}{x^{2N}} \leqslant N^{4N} x^{-2N} \leqslant e^{4\omega(x) \ln \frac{1}{\omega(x)}} e^{-2(\omega(x)-1)\ln x}.$$

Pour des x grands cette dernière expression ne sera pas supérieure à $e^{-\omega(x)}$ $\left(\text{car } \frac{\omega(x)}{x} \to 0\right)$. De plus, l'égalité $\lim\limits_{k\to\infty} \omega(k) = \infty$ entraîne de toute évidence

$$\lim \frac{(2\alpha)^{2N} 2^{2N} r^{-2N}}{\omega^2(1)\ldots\omega^2(N)} = 0.$$

L'inégalité (6.5.4) est démontrée.

Revenant aux fonctions Φ_r, notons que selon la condition 3) du lemme 16

$$\Phi_r(\lambda) \leqslant rw(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} K(rx) \sup_{\lambda} \frac{w(\lambda-x)}{w(\lambda)}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant rw(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} K(rx)\, e^{\omega(|x|)}\, dx \leqslant C_2 M_r w(\lambda), \qquad (6.5.5)$$

ce qui entraîne que pour tous les φ tels que $\int |\varphi(\lambda)|\, w(\lambda)\, d\lambda < \infty$, on a obligatoirement $\varphi\Phi_r \in \mathscr{L}^1$. Posons ensuite

$$\Phi_{rT}(\lambda) = r \int_{-T}^{T} K(r(x-\lambda))\, w(x)\, dx, \quad T > 0.$$

Il est évident que pour T quelconque

$$\Phi_{rT}(\lambda) \leqslant \Phi_r(\lambda) \leqslant \pi M_1 w(\lambda). \qquad (6.5.6)$$

Si de plus $|\lambda| \leqslant T/2$, d'une manière analogue à (6.5.5) on a

$$\Phi_r(\lambda) - \Phi_{rT}(\lambda) =$$

$$= r\left(\int_{-\infty}^{-T-\lambda} K(rx)\, w(x-\lambda)\, dx + \int_{T-\lambda}^{\infty} K(rx)\, w(x-\lambda)\, dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant rw(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{-T/2} K(rx)\, e^{\omega(x)}\, dx + \int_{T/2}^{\infty} K(rx)\, e^{\omega(x)}\, dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 w(\lambda)}{T} M_r.$$

D'où et de (6.5.6), pour des fonctions données quelconques $\varphi, \psi \in L(w)$ et pour r donné quelconque on déduit

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda\tau} \Phi_{rT}(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda\tau} \Phi_r(\lambda)\, d\lambda.$$

La dernière égalité et la définition de l'espace $L^+(w)$ permettent lors de la démonstration de l'égalité (6.5.2) de se limiter à l'étude

des intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda\tau}\Phi_{rT}(\lambda)\, d\lambda, \tag{6.5.7}$$

où $\varphi, \psi \in \mathscr{H}^2 \cap L(w)$, $\tau > r$, et T est un nombre positif quelconque.

En vertu du théorème de Paley-Wiener la transformée de Fourier $\chi_r(x)$ du noyau $rK(rx)$ s'annule à l'extérieur de l'intervale $[-r, r]$ de sorte que

$$\Phi_{rT}(\lambda) = \int_{-T}^{T} w(x)\, dx \int_{-r}^{r} e^{i(\lambda-x)s}\chi_r(s)\, ds = \int_{-r}^{r} e^{i\lambda s} b(s)\, ds, \qquad b \in \mathscr{L}^2.$$

Par conséquent, d'après le même théorème de Paley-Wiener, toutes les $\Phi_{rT}(\lambda)$ sont des fonctions entières de carré sommable de degré fini non supérieur à r. Donc pour tous les $\tau > r$ les fonctions $e^{i\lambda\tau}\varphi\psi\Phi_{rT} \in \mathscr{H}^1$ dans le demi-plan supérieur, et toutes les intégrales (6.5.7) sont nulles. L'égalité (6.5.2) est démontrée.

Pour la démonstration de la seconde partie du lemme 15, à savoir l'inégalité (6.5.3), remarquons tout d'abord qu'en vertu de la propriété 2) des noyaux $K(x)$ on a

$$|w(\lambda) - \Phi_r(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \left| w(\lambda) - w\left(\lambda - \frac{x}{r}\right) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \sup_{\lambda} \left| \frac{w(\lambda) - w\left(\lambda - \frac{x}{v}\right)}{w(\lambda)} \right| dx. \tag{6.5.8}$$

Pour tous les x on a $|e^x - 1| \leqslant |x| e^{|x|}$. Donc

$$\left| \frac{w(\lambda) - w\left(\lambda - \frac{x}{r}\right)}{w(\lambda)} \right| = \left| 1 - \exp\left\{ \ln \frac{w\left(\lambda - \frac{x}{r}\right)}{w(\lambda)} \right\} \right| \leqslant \omega\left(\frac{|x|}{r}\right) e^{\omega\left(\frac{|x|}{r}\right)}.$$

Substituons l'inégalité obtenue dans (6.5.8). Comme $\omega(|x|/r) \leqslant \leqslant (1 + |x|)\, \omega(1/r)$ *) on a (compte tenu de la propriété (6.5.4) des noyaux $K(x)$) pour tous les $r \geqslant 1$

$$|w(\lambda) - \Phi_r(\lambda)| \leqslant w(\lambda)\, w(1/z) \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, (1 + |x|\, e^{\omega(|x|)}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \omega(1/r) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \frac{\sin^4 \frac{x}{8}}{(x/8)^4}\, dx \cdot w(\lambda) = C_1 \omega(1/r)\, w(\lambda).$$

*) Tout module de continuité $\omega(\delta)$ satisfait à l'inégalité $\omega(\gamma\delta) \leqslant \leqslant (1 + \gamma)\, \omega(\delta)$, $\gamma > 0$ (voir, par exemple, [25], page 213).

Le lemme 15 et avec lui le théorème 5 se trouvent entièrement démontrés.

R e m a r q u e. On voit facilement que la constante C_1 peut s'écrire comme $C_4 M_1$, C_4 est cette fois une constante absolue, et M_1, caractéristique du noyau K, est déterminée par la fonction $\omega(x)$. Donc, bien que la constante M_1 ne soit pas absolue, on peut lui donner la même valeur pour toute une classe des fonctions $w(\lambda)$, par exemple pour toutes les $w(\lambda)$, telles que

$$\sup_{\lambda}\left|\ln \frac{g(\lambda+x)}{g(\lambda)}\right| \leqslant \omega(x).$$

E x e m p l e. Considérons le processus stationnaire $\xi_\alpha(t)$ de densité spectrale $f_\alpha(\lambda) = e^{-|\lambda|^\alpha}$, $\alpha > 0$. Si $\alpha \geqslant 1$, on a $\frac{f_\alpha}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1$, de sorte que $\xi_\alpha(t)$ n'est même pas régulier. Si $\alpha < 1$, on a

$$\sup_{\lambda} \ln \frac{f_\alpha(\lambda+x)}{f_\alpha(\lambda)} = \sup_{\lambda} (|\lambda+x|^\alpha - |\lambda|^\alpha) \leqslant \alpha |x|^\alpha.$$

Ce qui découle de l'inégalité suivante qu'on n'a aucune peine à vérifier :

$$(1+u)^\alpha - 1 - \alpha u^\alpha \leqslant 0, \quad u > 0.$$

Par conséquent, pour $\alpha < 1$, le processus $\xi_\alpha(t)$ est complètement régulier, et $\rho(\tau) = O(\tau^{-\alpha})$. (Bien entendu, la constante dans le symbole $O(\cdot)$ dépend de α.)

§ 6. Une classe spéciale de processus stationnaires

Ce paragraphe est consacré aux conditions de régularité complète des processus stationnaires $\xi(t)$ de densité spectrale du type $|\Gamma(\lambda)|^{-2}$, où $\Gamma(\lambda)$ est une fonction entière de degré fini. Pourquoi un tel intérêt à des processus de ce type spécial ?

On peut certainement considérer comme les plus simples les processus stationnaires dont la densité spectrale est égale à $|P(\lambda)|^{-2}$, où P est un polynôme. Dans le cas des processus stationnaires gaussiens, les projections des processus markoviens vectoriels (homologues continus des processus markoviens à m chaînons) sont toutes des processus de ce type spécial. La conséquence immédiate du théorème 5 est qu'un processus stationnaire de densité $|P(\lambda)|^{-2}$ est complètement régulier. Des calculs simples montrent que le coefficient de régularité correspondant satisfait à la condition

$$\rho(\tau) = O(e^{-\tau(\delta-\varepsilon)}), \tag{6.6.1}$$

où 2δ est la largeur de la bande où la fonction $1/P(z)$ est analytique ($|\operatorname{Im} z| < \delta$), et ε un nombre positif quelconque *).

Les fonctions entières de degré fini sont une classe des fonctions analytiques un peu plus compliquée que les polynômes, et il y a tout lieu de penser qu'on peut encore, dans ce cas, espérer trouver un critère simple et définitif de régularité complète. Si ce problème est résolu, en même temps sera résolu le problème lié de la description d'un ensemble de fonctions entières de degré fini, qui, étant diviseurs d'une fonction complètement régulière quelconque lui conserve la régularité complète (voir §§ 2 à 4; comparer également avec le lemme 11 du chapitre V).

Théorème 6. *Pour qu'un processus stationnaire* $\xi(t)$ *de densité spectrale du type* $|\Gamma(\lambda)|^{-2}$, *où* Γ *est une fonction de degré fini, soit complètement régulier il faut et il suffit que*

1) $\frac{\ln|\Gamma|}{1+\lambda^2} \in \mathscr{L}^1(-\infty, \infty)$;

2) *la fonction* Γ *soit une fonction de la classe* A^*, c'est-à-dire que $\sup\limits_{\lambda} \sum \left|\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - z_j}\right| < \infty$, *où la somme est prise sur tous les zéros non réels* z_j *de la fonction* Γ.

Dans ce cas on aura toujours $\inf|\operatorname{Im} z_j| = \delta > 0$ *et pour* $\varepsilon > 0$ *quelconque*

$$\rho(\tau) = O(e^{-\tau(\delta-\varepsilon)}). \tag{6.6.2}$$

Démonstration. Supposons que les conditions 1) et 2) soient satisfaites. Sans restreindre la généralité on peut considérer que tous les zéros de la fonction $\Gamma(z)$ se trouvent dans le demi-plan inférieur, et $\Gamma(z)$ et $\frac{1}{\Gamma(z)}$ sont des fonctions extérieures dans le demi-plan supérieur (voir § 4). Introduisons la fonction méromorphe $\chi(z) = \frac{\Gamma(z)}{\overline{\Gamma}(z)}$, où comme précédemment $\overline{\Gamma}(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$.

D'après l'égalité (6.1.4)

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \theta(\lambda) \chi(\lambda) \, d\lambda \right|, \tag{6.6.3}$$

où θ parcourt une sphère unitaire dans l'espace $\mathscr{H}^1$. En vertu du lemme 13 la fonction $\chi(z)$ est analytique dans une bande de largeur non nulle $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $\delta = \inf|\operatorname{Im} z_j| > 0$, et est bornée dans une bande quelconque $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta' < \delta$. D'après le théorème de

*) Dans l'article de A. M. Iaglom, cité à la page 136, on trouvera la démonstration du fait que dans ce cas $\rho(\tau)$ est la racine maximale d'une équation déterminante; les autres racines de cette équation coïncident également avec les nombres propres de l'opérateur B_τ.

Bernstein sur l'approximation des fonctions analytiques *) on trouvera des fonctions entières bornées $\Phi_r(\lambda)$ de degré fini non supérieur à r telles que

$$\sup_{\lambda} |\chi(\lambda) - \Phi_r(\lambda)| = O(e^{-r(\delta-\varepsilon)}), \qquad \varepsilon > 0.$$

Pour $r < \tau$ quelconque on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda)\,\Phi_r(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Donc pour $r < \tau$

$$\rho(\tau) = \sup_{\theta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda)\,[\chi(\lambda) - \Phi_r(\lambda)]\,d\lambda \right| = O(e^{-r(\delta-\varepsilon)}),$$

ce qui démontre l'égalité (6.6.2).

La condition 1) est nécessaire par suite de la régularité du processus $\xi(t)$, et de nouveau on peut considérer que Γ et $1/\Gamma$ sont des fonctions extérieures dans le demi-plan supérieur.

Montrons la nécessité de la condition $\Gamma \in A^*$. En désignant par z_j les zéros de la fonction $\Gamma(z)$ on peut l'écrire comme suit :

$$\Gamma(z) = e^{az+b} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}. \tag{6.6.4}$$

En vertu de la condition 1) déjà démontrée on a **)

$$\sum \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_j} \right| < \infty.$$

Donc

$$\chi(z) = \frac{\Gamma(z)}{\overline{\Gamma}(z)} = \alpha e^{i\beta z} \prod \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{z}_j}\right)^{-1},$$

où β est un nombre réel, et $|\alpha| = 1$. Dans le demi-plan supérieur $z = \lambda + i\mu$, $\mu > 0$, on a

$$|\overline{\chi}(z)\, e^{i\beta z}| = \left| \frac{e^{i\beta z}}{\chi(z)} \right| = \prod \left| 1 - \frac{z}{\bar{z}_j} \right| \left| 1 - \frac{z}{z_j} \right|^{-1} = \\ = \prod \left[\frac{(\operatorname{Re} z_j - \lambda)^2 + (\operatorname{Im} z_j + \mu)^2}{(\operatorname{Re} z_j - \lambda)^2 + (\operatorname{Im} z_j - \mu)^2} \right]^{1/2} \leqslant 1.$$

Par conséquent pour tous les $\tau \geqslant \beta$ la fonction $e^{i\tau z}\overline{\chi}(z)$ est une fonction (intérieure) de la classe $\mathcal{H}^\infty$. Donc chaque fois que $\theta \in \mathcal{H}^1$, la fonction $e^{i\tau\lambda}\theta\overline{\chi}$ appartient également à $\mathcal{H}^1$ dans le demi-plan

*) Voir [25], page 317.
**) Voir [16], page 314.

supérieur de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\theta(\lambda)\,\overline{\chi}(\lambda)\,d\lambda = 0. \qquad (6.6.5)$$

En même temps, d'après (6.1.4)

$$\sup_{\theta\in\mathscr{H}^1}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\theta(\lambda)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\right| = \rho(\tau). \qquad (6.6.6)$$

Notons que si $\theta\in\mathscr{H}^1$ dans le demi-plan supérieur, on a $\overline{\theta}\in\mathscr{H}^1$ dans le demi-plan inférieur. Les égalités (6.6.5) et (6.6.6) permettent donc d'affirmer que pour tous les θ^+ appartenant à une sphère unitaire de $\mathscr{H}^{1+}$, et tous les θ^- appartenant à une sphère unitaire de $\mathscr{H}^{1-}$, quel que soit $\tau\geqslant\beta$, on a

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\theta^+(\lambda)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\right| &\leqslant \rho(\tau),\\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\theta^-(\lambda)\,\chi(\lambda)\,d\lambda\right| &\leqslant \rho(\tau).\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.7)$$

Les inégalités (6.6.7) permettent de démontrer le lemme suivant.

Lemme 17. *Pour $t\to 0$ on a uniformément en λ, $-\infty < \lambda < \infty$,*

$$\int_{\lambda-t}^{\lambda} \chi(s)\,ds - \int_{\lambda}^{\lambda+t} \chi(s)\,ds = o(t). \qquad (6.6.8)$$

Démonstration. Soit $a(\lambda)$ une fonction impaire, trois fois dérivable et s'annulant à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 1]$. Montrons d'abord que pour $T\to\infty$ on a uniformément en x, $-\infty < x < \infty$,

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2}\,\chi(\lambda+x)\,a(T\lambda)\,d\lambda = o(1). \qquad (6.6.9)$$

Cette égalité est analogue au lemme 11. En vertu de (6.6.7) on a les inégalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\left(\int_0^T e^{i\lambda u}\,du\right)^2 \chi(\lambda+x)\,d\lambda\right| &\leqslant \rho(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda T}{\lambda^2}}{\lambda^2}\,d\lambda = \rho(\tau)\,\frac{\pi T}{2},\\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\left(\int_{-T}^{T} e^{i\lambda u}\,du\right)\chi(\lambda+x)\,d\lambda\right| &\leqslant \rho(\tau)\,\frac{\pi T}{2},\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.10)$$

si seulement $\tau \geqslant \beta$. Notons que la démonstration du lemme 11 est basée sur des inégalités du type (6.6.10). Les mêmes raisonnements qui démontrent le lemme 11 permettent de déduire l'égalité (6.6.9) des inégalités (6.6.10) Pour cette raison nous omettons ici la démonstration.

Définissons la fonction impaire $a_0(\lambda)$ par les égalités suivantes:

$$a_0(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{\sin^2 \dfrac{\lambda}{2}}, & 0 < \lambda < 1, \\ 0, & \lambda > 1, \end{cases}$$

$$a_0(\lambda) = -a_0(-\lambda).$$

Soient $a_\varepsilon(\lambda)$, $\varepsilon > 0$, des fonctions impaires, trois fois dérivables, coïncidant avec $a_0(\lambda)$ à l'extérieur des intervalles $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $[-1, -1+\varepsilon]$, $[1-\varepsilon, \varepsilon]$ et monotones à l'intérieur des intervalles mentionnés. Utilisant (6.6.9) on obtient

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} \chi(\lambda + x) [a_0(T\lambda) - a_\varepsilon(T\lambda)] \, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sin^2 \frac{1}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\lambda^2} d\lambda + o(1) \leqslant 16\varepsilon + o(1).$$

L'égalité (6.6.9) restera donc vraie si on y remplace $a(\lambda)$ par $a_0(\lambda)$; en désignant de plus $1/T$ par t on obtient (6.6.8). Le lemme est démontré.

L e m m e 18. *Il existe un nombre positif* $\delta > 0$ *tel que la fonction* $\chi(z) = \Gamma(z)/\overline{\Gamma}(z)$ *soit analytique dans la bande* $|\operatorname{Im} z| < \delta$.

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $\chi(z)$ est méromorphe et a pour pôles les zéros non réels de la fonction $\overline{\Gamma}(z)$. Il faut donc démontrer que tous les zéros non réels de la fonction $\overline{\Gamma}(z)$ se trouvent à l'extérieur de la bande $|\operatorname{Im} z| < \delta$.

Soit $\overline{z_j} = \alpha_j - i\beta_j$ un zéro quelconque de la fonction $\overline{\Gamma}$. Définissons les fonctions entières $\gamma_j(z)$ et $\overline{\gamma_j}(z)$ par les égalités suivantes:

$$\overline{\gamma_j}(z) = \left(1 - \frac{z}{\overline{z_j}}\right)^{-1} \overline{\Gamma}(z), \qquad \gamma_j(z) = \overline{\overline{\gamma}(\overline{z})}.$$

Posons

$$\varphi_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi T_j} \frac{e^{iT_j(\lambda - \alpha_j)} - 1}{\lambda - \alpha_j}, \qquad T_j = \frac{1}{|\beta_j|}.$$

Il est facile de voir que $\overline{\gamma_j}/\gamma_j \in \mathscr{H}^\infty$ dans le demi-plan supérieur et donc $\varphi_j \dfrac{\overline{\gamma_j}}{\gamma_j} \in \mathscr{H}^1$ dans le demi-plan supérieur avec de plus

$\left\| \varphi_j \frac{\bar{\gamma}_j}{\gamma_j} \right\|^{(1)} = 1$. En vertu de (6.6.7) on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \varphi_j(\lambda) \frac{\bar{\gamma}_j(\lambda)}{\gamma_j(\lambda)} \chi(\lambda)\, d\lambda \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \varphi_j(\lambda) \frac{z_j - \lambda}{\bar{z}_j - \lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \rho(\tau). \quad (6.6.11)$$

La fonction $\varphi_j(z) \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z} - z$ est analytique dans le demi-plan supérieur, à l'exception du pôle au point z_j, et tend vers 0 pour $|z| \to \infty$. Donc l'intégrale du second membre peut être calculée par les résidus de la fonction sous l'intégrale. Cette intégrale vaut

$$2\pi i \left(\text{résidu } e^{i\lambda\tau} \varphi_j(z) \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z} \right) = -2(e^{-1} - 1)^2 e^{i\tau\bar{z}_j}.$$

En portant ce résultat dans (6.6.11) on trouve

$$\rho(\tau) \geqslant \frac{2}{e^2}(e-1)^2 e^{\beta_j \tau}. \quad (6.6.12)$$

Par conséquent, si $\delta = \inf |\beta_j|$, où l'infimum s'étend à tous les $\beta_j \neq 0$ on a

$$\rho(\tau) \geqslant \frac{2}{e^2}(e-1)^2 e^{-\delta\tau},$$

et comme lorsque τ augmente on a $\rho(\tau) \to 0$, on aura forcément $\delta > 0$. Le lemme 18 est démontré.

Nous allons montrer maintenant que de l'égalité (6.6.8) et du fait que la fonction $\chi(z)$ est analytique dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \delta$ on déduit pour la dérivée $\chi'(\lambda)$ l'inégalité suivante : $\sup_\lambda |\chi'(\lambda)| < \infty$. Comme

$$|\chi'(\lambda)| = \left| \beta - \sum \operatorname{Im} \frac{1}{z_j - \lambda} \right| = \left| \beta - 2 \sum \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_j - \lambda} \right| \right|,$$

le théorème sera démontré. Ultérieurement, pour plus de simplicité, on supposera β égal à zéro. Ceci ne restreint pas la généralité car dans les inégalités de base (6.6.7) le facteur $e^{\pm i\lambda\beta}$ peut être inclu dans $e^{i\tau\lambda}$ ce qui, dans le cas le plus défavorable, ne fera que remplacer $\rho(\tau)$ par $\rho(\tau - |\beta|)$.

Comme ci-dessus supposons que $z_j = \alpha_j + i\beta_j$. En vertu du théorème de Leibnitz on a

$$\chi'(\lambda) = \chi(\lambda) \sum \frac{|2\beta_j|}{(\alpha_j - \lambda)^2 + \beta_j^2},$$
$$\chi^{(s+1)}(\lambda) = \sum_0^s C_s^k \chi^{(k)}(\lambda) \left(\sum_j \frac{2|\beta_j|}{(\alpha_j - \lambda)^2 + \beta_j^2} \right)^{(s-k)}, \quad (6.6.13)$$

la sommation s'étendant à tous les j pour lesquels $\beta_j \neq 0$. D'après le lemme 18 on a $|\beta_j| = -\beta_j \geq \delta > 0$ et donc

$$\left|\left(\frac{2\beta_j}{(\alpha_j-\lambda)^2+\beta_j^2}\right)^{(r)}\right| = \left|\left(\frac{1}{\bar{z}_j-\lambda}-\frac{1}{z_j-\lambda}\right)^{(r)}\right| \leq$$

$$\leq 2r!\,\frac{1}{|z_j-\lambda|^{r+1}} \leq \frac{2r!}{(2\delta)^p}\,\frac{(2\beta_j)^p}{|z_j-\lambda|^{r+1}}, \qquad p \geq 0.$$

Par conséquent pour $s-k \geq 1$ on a

$$\left|\left(\sum_j \frac{2|\beta_j|}{(\alpha_j-\lambda)^2+\beta_j^2}\right)^{(s-k)}\right| \leq \frac{2\cdot(s-k)!}{(2\delta)^{\frac{s-k+1}{2}}} \sum_j \frac{(2|\beta_j|)^{\frac{s-k+1}{2}}}{|z_j-\lambda|^{s-k+1}} \leq$$

$$\leq \frac{2\cdot(s-k)!}{(2\delta)^{\frac{s-k+1}{2}}}\left(\sum_j \frac{2|\beta_j|}{|z_j-\lambda|^2}\right)^{\frac{s-k+1}{2}} = 2\,\frac{(s-k)!}{(2\delta)^{\frac{s-k+1}{2}}}\,|\chi'(\lambda)|^{\frac{s-k+1}{2}}. \tag{6.6.14}$$

Supposons qu'au point λ on ait l'inégalité $|\chi'(\lambda)| \geq 1$. Supposons de plus qu'en ce même point pour tous les $k = 2, 3, \ldots, s$

$$|\chi^{(k)}(\lambda)| \leq L^k\cdot k!\,|\chi'(\lambda)|^k, \tag{6.6.15}$$

où L est une constante. Montrons qu'alors (6.6.15) est également vérifiée pour $k = s+1$. A cet effet portons (6.6.15) dans (6.6.13); compte tenu de l'inégalité (6.6.14) et de l'hypothèse $|\chi'(\lambda)| \geq 1$ on trouve

$$|\chi^{(s+1)}(\lambda)| \leq L^s s!\,|\chi'(\lambda)|^{s+1} + \sum_{k=0}^{s-1} s!\,\frac{2L^k}{(2\delta)^{\frac{s-k+1}{2}}}\,|\chi'(\lambda)|^s \leq$$

$$\leq s!\,|\chi'(\lambda)|^{s+1}\left(L^s+\sqrt{\frac{2}{\delta}}\left(L^s+(2\delta)^{-s/2}\right)\right) \leq L^{s+1}(s+1)!\,|\chi'(\lambda)|^{s+1},$$

si la constante L est prise suffisamment grande (par exemple si $L > \left(1+2\sqrt{2/\delta}\right)$).

En vertu de (6.6.13) et (6.6.14) aux points où $|\chi'(\lambda)| \geq 1$, on a notoirement

$$|\chi''(\lambda)| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\right)|\chi'(\lambda)|^2 < L^2\cdot 2!\,|\chi'(\lambda)|^2,$$

si la constante L est suffisamment grande. Donc en tous les points λ où $|\chi'(\lambda)| > 1$ et pour tous les $k \geq 2$, les inégalités (6.6.15) sont vérifiées, la constante L dans ces inégalités ne dépend pas de λ.

Montrons maintenant que l'hypothèse $\sup|\chi'(\lambda)| = \infty$ se trouve en contradiction avec le lemme 17. A cet effet prenons une suite des points λ_k de telle sorte que $M_k = |\chi'(\lambda_k)| \to \infty$ et posons $t_k = \dfrac{1}{4M_kL}$.

Conformément à (6.6.8) pour $k \to \infty$ on a

$$\int_{\lambda_k - t_k}^{\lambda_k} \chi(\lambda)\, d\lambda - \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + t_k} \chi(\lambda)\, d\lambda = o(t_k). \tag{6.6.16}$$

Pour des k grands on a $|t_k| < \delta/2$ et selon le lemme 18 la fonction $\chi(\lambda)$, analytique dans le domaine $|\lambda - \lambda_k| \leqslant t_k$, s'y développe en série de Taylor :

$$\chi(\lambda) = \chi(\lambda_k) + \chi'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s}{s!} \chi^{(s)}(\lambda_k).$$

En substituant ce développement dans le second membre de (6.6.16), compte tenu de l'estimation (6.6.15), on obtient l'inégalité suivante:

$$\left| \int_{\lambda_k - t_k}^{\lambda_k} \chi(\lambda)\, d\lambda - \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + t_k} \chi(\lambda)\, d\lambda \right| = \left| \chi'(\lambda_k)\, t_k^2 + 2 \sum_{s=2}^{\infty} \frac{t_k^{2s}}{2s!} \chi^{(2s-1)}(\lambda_k) \right| \geqslant$$

$$\geqslant |\chi'(\lambda_k)\, t_k^2| \left| 1 - 2 \sum_{s=2}^{\infty} L^s t_k^s |\chi'(\lambda_k)|^s \right| \geqslant \frac{t_k^2}{3} |\chi'(\lambda_k)| = \frac{1}{12L} t_k \neq o(t_k).$$

La contradiction obtenue montre que la condition $\Gamma \in A^*$ est nécessaire. Ce qui achève la démonstration du théorème 6.

R e m a r q u e. Nous avons démontré en passant l'égalité suivante découlant de (6.6.2) et (6.6.12):

$$\lim_{\tau \to 0} (\rho(\tau))^{1/\tau} = e^{-\delta}, \quad \delta = \inf_{\beta_j = 0} |\beta_j|.$$

CHAPITRE VII

FILTRAGE ET ESTIMATION DE LA VALEUR MOYENNE

§ 1. Meilleures estimations non biaisées

1. Position du problème. Considérons un processus aléatoire du type

$$\xi(t) = \theta(t) + \Delta(t), \quad t \in T, \tag{7.1.1}$$

où $\theta(t)$, $t \in T$, est une fonction déterministe inconnue d'une certaine classe Θ, et $\Delta(t)$, $t \in T$, un processus gaussien stationnaire de valeur moyenne nulle et de fonction de corrélation $B(t)$.

On peut interpréter $\theta = \theta(t)$ comme un signal utile, et $\Delta = \Delta(t)$ comme un bruit aléatoire apparaissant dans le canal de communication. Nous allons étudier le problème du filtrage optimal du processus aléatoire $\xi = \xi(t)$, c'est-à-dire de l'extraction de (7.1.1) du signal inconnu $\theta \in \Theta$. Le problème consiste à transformer le signal reçu ξ de sorte à reproduire au mieux θ. Le processus aléatoire $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ obtenu après transformation doit satisfaire aux conditions suivantes: *primo*, la valeur moyenne de la différence $\hat{\theta}(t) - \theta(t)$ doit être égale à zéro:

$$\mathbf{M}[\hat{\theta}(t) - \theta(t)] = 0, \quad t \in T, \tag{7.1.2}$$

et *secundo*, la valeur quadratique moyenne de cette différence doit être minimale:

$$\mathbf{M}[\hat{\theta}(t) - \theta(t)]^2 = \min. \tag{7.1.3}$$

La distribution d'un processus aléatoire du type (7.1.1) dépendant du paramètre fonctionnel $\theta \in \Theta$, il existe une famille de distributions $\mathbf{P}_\theta$, où le paramètre $\theta = \theta(t)$, $t \in T$, est la valeur moyenne de la distribution correspondante $\mathbf{P}_\theta$:

$$\theta(t) = \mathbf{M}_\theta \xi(t), \ t \in T. \tag{7.1.4}$$

La fonction de corrélation est alors la même pour tous les θ, à savoir:

$$\mathbf{M}_\theta [\xi(s) - \theta(s)] [\xi(t) - \theta(t)] = B(t - s) \tag{7.1.5}$$

(ici et ultérieurement nous désignerons par $\mathbf{M}_\theta \eta$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire η calculée d'après la distribution correspondante $\mathbf{P}_\theta$).

Le problème du filtrage coïncide en fait avec celui de la recherche de la meilleure estimation $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ d'une moyenne inconnue $\theta = \theta(t)$. Ce problème est particulièrement intéressant dans le cas où $\theta = \theta(t)$ est de la forme

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k(t). \tag{7.1.6}$$

où $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$ sont des fonctions données, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des coefficients (réels) inconnus (coefficients de régression).

Chacun de ces coefficients est une fonctionnelle linéaire de $\theta \in \Theta$. Si, par exemple, dans l'espace linéaire de toutes les fonctions $\theta = \theta(t)$ du type (7.1.6) on définit un produit scalaire (θ', θ'') et les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_N$ sont une base dans cet espace, on a

$$\alpha_k = (\theta_k^*, \theta), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{7.1.7}$$

où $\theta_1^*, \ldots, \theta_N^*$ est un système de fonctions conjugué défini par les conditions

$$(\theta_k^*, \theta_j) = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 1, \ldots, N.$$

Nous allons montrer ultérieurement que les meilleures estimations non biaisées $\hat{\theta}(t)$, $t \in T$, sont celles qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{\theta}(t) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\alpha}_k \theta_k(t), \quad t \in T, \tag{7.1.8}$$

où $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_N$ sont les meilleures estimations non biaisées pour les coefficients inconnus $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Les valeurs isolées de $\theta(t)$ sont également des fonctionnelles linéaires de $\theta \in \Theta$. Ultérieurement nous étudierons les meilleures estimations non biaisées des fonctionnelles linéaires quelconques $\alpha = \alpha(\theta)$ d'une fonction inconnue $\theta = \theta(t)$, $t \in T$. Lors de cette étude il est naturel de supposer que toutes les distributions $\mathbf{P}_\theta$ sont équivalentes. Sans restreindre la généralité, on peut considérer qu'elles sont équivalentes à la distribution $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ correspondant à la valeur nulle du paramètre θ (c'est-à-dire $\theta(t) \equiv 0$). C'est ce que nous allons supposer dans la suite.

2. Statistiques nécessaires et suffisantes. Famille complète de distributions. Précisons qu'on entend par statistique toute variable aléatoire $\eta = \eta(\omega)$ mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{A}(T)$ engendrée par les valeurs $\xi(t) = \xi(\omega, t)$ du processus aléatoire observé (ici $t \in T$ et $\omega \in \Omega$, où Ω est l'espace des événements élémentaires). Il est tout naturel de se poser la question de savoir quelles sont les statistiques qu'il suffit d'étudier lors de l'estimation du paramètre inconnu $\theta \in \Theta$ sans perte d'information.

Lorsqu'on parle de telle ou telle famille de statistiques $\eta = \eta(\omega)$ il semble bon de se référer directement à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ qu'elles engendrent. Nous dirons donc qu'une σ-algèbre $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}(T)$ est *suffisante* pour estimer le paramètre $\theta \in \Theta$ si les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B})$ calculées pour tous les événements $A \in \mathfrak{A}(T)$ d'après les distributions correspondantes $\mathbf{P}_\theta$ sont telles que pour chaque $\theta \in \Theta$ avec une probabilité 1 on a

$$\mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B}) = \mathbf{P}(A/\mathfrak{B}), \qquad (7.1.9)$$

c'est-à-dire que les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B})$ ne dépendent pas du paramètre inconnu $\theta \in \Theta$. Nous dirons qu'une σ-algèbre $\mathfrak{B}$ est *nécessaire* si elle est contenue dans toute σ-algèbre suffisante (complétée peut-être par des ensembles de probabilité 0) *).

Notons que si $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre suffisante, pour une grandeur quelconque réelle, d'espérance mathématique $\mathbf{M}_\theta \eta$ pour $\theta \in \Theta$ quelconque, avec une probabilité 1 est vérifiée la formule suivante:

$$\mathbf{M}_\theta(\eta/\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\eta/\mathfrak{B}), \quad \theta \in \Theta. \qquad (7.1.10)$$

Ceci découle immédiatement de l'égalité (7.1.9) si l'on tient compte de ce que l'espérance mathématique conditionnelle $\mathbf{M}_\theta(\eta/\mathfrak{B})$ peut être définie comme la limite

$$\mathbf{M}_\theta(\eta/\mathfrak{B}) = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{k}{n} \mathbf{P}_\theta\left(\frac{k-1}{n} \leqslant \eta < \frac{k}{n} \Big/ \mathfrak{B}\right),$$

où la convergence est entendue en moyenne par rapport à $\mathbf{P}_0$; par suite de l'équivalence des distributions $\mathbf{P}_\theta$ cette limite est, avec une probabilité 1, la même pour tout $\theta \in \Theta$.

Soit

$$p_\theta(\omega) = \mathbf{P}_\theta(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega) \qquad (7.1.11)$$

la densité de la distribution $\mathbf{P}_\theta$. Désignons par $\mathfrak{B}$ la σ-algèbre des événements engendrée par toutes les fonctions $p_\theta(\omega)$ de $\omega \in \Omega$ $(\theta \in \Theta)$. On a le lemme suivant.

Lemme 1. *La σ-algèbre $\mathfrak{B}$ est suffisante pour le paramètre* $\theta \in \Theta$.

Démonstration. En effet, pour $A \in \mathfrak{A}(T)$ et $B \in \mathfrak{B}$ quelconques on a

$$\mathbf{P}_\theta(AB) = \int_{AB} p_\theta(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\chi_A\chi_B p_\theta/\mathfrak{B})] =$$

$$= \mathbf{M}[\chi_B p_0 \mathbf{M}(\chi_A/\mathfrak{B})] = \int_B \mathbf{P}(A/\mathfrak{B})\, p_\theta(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$$

*) Voir, par exemple, [17].

et en même temps

$$\mathbf{P}_\theta(AB) = \int_B \mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B})\,\mathbf{P}_\theta(d\omega) = \int_B \mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B})\,p_\theta(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega),$$

où $\chi_A = \chi_A(\omega)$ et $\chi_B = \chi_B(\omega)$ sont les indicateurs des ensembles A et B. Comme B est un ensemble quelconque de $\mathfrak{B}$, pour des fonctions sous l'intégrale mesurables par rapport à $\mathfrak{B}$, on a pour presque tous les $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{P}_\theta(A/\mathfrak{B})\,p_\theta(\omega) = \mathbf{P}(A/\mathfrak{B})\,p_\theta(\omega),$$

mais $p_\theta(\omega)$, en tant que densité des mesures équivalentes $\mathbf{P}_\theta$ et $\mathbf{P}$, est presque partout positive, de sorte qu'avec une probabilité 1 on a l'égalité (7.1.9).

Notons que toutes les fonctions p_θ, $\theta \in \Theta$, données par la formule (7.1.11) satisfont à la condition $\mathbf{M}p_\theta = 1$. Désignons par $\boldsymbol{L}^1$ l'espace de toutes les grandeurs η, mesurables par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$, pour lesquelles $\mathbf{M}\,|\,\eta\,| < \infty$.

On dit qu'une famille de distributions $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, est *complète bornée* dans $\boldsymbol{L}^1$ si pour une grandeur quelconque bornée η (mesurable par rapport à $\mathfrak{B}$) la relation

$$\mathbf{M}_\theta\eta = \mathbf{M}\eta p_\theta = 0, \qquad \theta \in \Theta,$$

équivaut à ce que $\eta = 0$ avec une probabilité 1.

La propriété de complétude bornée signifie *) que toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Banach $\boldsymbol{L}^1$ (avec la norme $\|\,\eta\,\| = \mathbf{M}\,|\,\eta\,|$) s'annulant sur les éléments $p_\theta \in \boldsymbol{L}^1$ est identiquement nulle. Ainsi la propriété de complétude bornée pour une famille de distributions $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, équivaut à ce que l'enveloppe linéaire des grandeurs p_θ, $\theta \in \Theta$, est dense partout dans $\boldsymbol{L}^1$.

L e m m e 2. *Pour une famille complète bornée de distributions* $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, *la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ (engendrée par toutes les grandeurs du type* (7.1.11)) *est non seulement suffisante mais également nécessaire.*

D é m o n s t r a t i o n. En effet, si $\mathfrak{B}$ n'est pas nécessaire, elle contient une certaine σ-algèbre $\mathfrak{C}$ suffisante, telle qu'un certain ensemble $B \in \mathfrak{B}$ ne fasse pas partie du complété $\mathfrak{C}^*$, en d'autres termes, la grandeur $\eta = \eta(\omega)$ du type

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \in B, \\ 0 & \text{pour } \omega \notin B \end{cases}$$

n'est pas mesurable par rapport à $\mathfrak{C}^*$. Comme $\mathfrak{C}$ est une σ-algèbre suffisante, la grandeur $\hat{\eta} = \mathbf{M}_\theta(\eta/\mathfrak{C})$ ne dépend pas de $\theta \in \Theta$, et $\mathbf{M}_\theta(\eta - \hat{\eta}) \equiv 0$ pour tous les $\theta \in \Theta$. Puis, si $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, on a également $0 \leqslant \hat{\eta} \leqslant 1$, donc la grandeur $\Delta = \eta - \hat{\eta}$ est bornée.

*) Voir, par exemple, [26], page 35.

La famille des $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, étant complète, la grandeur bornée $\Delta = \eta - \hat{\eta}$ (mesurable par rapport à $\mathfrak{B}$) est, avec une probabilité 1, égale à 0, et $\eta = \hat{\eta}$. Ainsi la grandeur η est en fait mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{S}^*$. La contradiction obtenue montre que la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ est nécessaire.

Pour les distributions gaussiennes $\mathbf{P}_\theta$ que nous étudions nous connaissons déjà les conditions d'équivalence ainsi que la forme explicite des fonctions (7.1.11). A savoir, selon le théorème 7 du chapitre III, pour que des distributions gaussiennes $\mathbf{P}_\theta$ et $\mathbf{P}$ soient équivalentes il faut et il suffit que la valeur moyenne $\theta(t)$, $t \in T$, appartienne à l'espace Y de toutes les fonctions réelles $y(t)$, $t \in T$, admettant la représentation

$$y(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda) F(d\lambda), \quad t \in T; \tag{7.1.12}$$

où $\varphi(\lambda)$ est une fonction de l'espace correspondant $L_T(F)$ et $F(d\lambda)$ la mesure spectrale du processus aléatoire $\xi(t)$, stationnaire par rapport à la distribution $\mathbf{P}$.

Comme nous l'avons déjà noté (voir § 6, chapitre I) la représentation (7.1.12) est unique. Définissons sur l'espace linéaire Y un produit scalaire en posant

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_F, \tag{7.1.13}$$

où $\varphi_1(\lambda)$ et $\varphi_2(\lambda)$ sont des éléments de l'espace hilbertien $L_T(F)$, correspondant d'après la formule (7.1.12) aux fonctions $y_1 = y_1(t)$ et $y_2 = y_2(t)$. Ainsi, pour les représentations équivalentes $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, l'ensemble paramétrique Θ est un ensemble dans l'espace hilbertien Y:

$$\Theta \subseteq Y. \tag{7.1.14}$$

L'inclusion de Θ dans Y est tout naturelle, indiquons en guise d'exemple les cas où l'ensemble T est fini, de sorte que l'on a un nombre fini de variables gaussiennes $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ de valeurs moyennes inconnues $\theta(t_1), \ldots, \theta(t_n)$ et de même matrice de corrélation. Si cette matrice est régulière, Y est un espace vectoriel à n dimensions dans lequel Θ est un ensemble de vecteurs θ de coordonnées $\theta(t_1), \ldots, \theta(t_n)$. Si la matrice de corrélation est singulière d'un rang $m < n$, Y est un sous-espace à m dimensions dans l'espace vectoriel à n dimensions, où se trouve concentrée chacune des distributions gaussiennes $\mathbf{P}_\theta$ dégénérées (distributions des variables $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$).

En vertu de la formule (3.3.2) les fonctions (7.1.11) sont de la forme:

$$p_\theta(\omega) = C_\theta \exp\{\eta_\theta(\omega)\}, \tag{7.1.15}$$

où

$$C_\theta = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{M}\eta_\theta^2\right\}, \quad \eta_0 = \int \varphi_\theta(\lambda)\Phi(d\lambda)$$

et $\Phi(\lambda)$ désigne la mesure spectrale stochastique du processus gaussien $\xi(t)$, stationnaire par rapport à la distribution $\mathbf{P}$ et la fonction $\varphi_\theta(\lambda) \in L_T(F)$ est la même que dans la représentation (7.1.12) de la fonction correspondante $\theta \in Y$:

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_\theta(\lambda) F(d\lambda), \quad t \in T. \tag{7.1.16}$$

L e m m e 3. *Si l'ensemble paramétrique $\Theta \subseteq Y$ contient un certain parallélépipède de son enveloppe linéaire fermée $\overline{\Theta}$, la famille de distributions $\mathbf{P}_\theta$ est complète bornée.*

D é m o n s t r a t i o n. Dans le sous-espace hilbertien $\overline{\Theta} \subseteq Y$, muni d'une base orthonormée $\theta_1, \theta_2, \ldots$ on entend par parallélépipède l'ensemble de tous les points $\theta = \sum c_k\theta_k$ ayant un nombre fini de coordonnées $c_1, c_2, \ldots$ différentes de zéro et satisfaisant à la condition

$$| c_k - c_k^0 | \leqslant \delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où $c_1^0, c_2^0, \ldots$ sont les coordonnées d'un élément donné, et $\delta_1, \delta_2, \ldots$ des entiers positifs. Posons $\eta_k = \eta_{\theta k}$ (voir formule (7.1.15)), $k = 1, 2, \ldots$ A partir de (7.1.16) on a

$$\eta_\theta = \sum c_k\eta_k \quad \text{avec} \quad \theta = \sum c_k\theta_k.$$

Il est facile de voir que les grandeurs p_θ, $\theta \in \Theta$, données par la formule (7.1.15) (où η_θ, $\theta \in \Theta$, sont des variables gaussiennes de l'espace $H(T)$), font partie de l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}(t)$. Il est clair que le système des p_θ, $\theta \in \Theta$, sera complet dans l'espace $\boldsymbol{L}^1$ s'il est complet dans l'espace hilbertien $\boldsymbol{L}^2$ (que nous désignerons dans la suite simplement $\boldsymbol{L}$) composé de toutes les grandeurs $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$ mesurables par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ (rappelons que $\mathfrak{B}$ est engendrée par le système des p_θ, $\theta \in \Theta$, ou, ce qui est la même chose, par le système de grandeurs η_θ, $\theta \in \Theta$).

Soit $\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ une fonction de Borel dans l'espace réel à n dimensions. Il est évident que l'ensemble de toutes les grandeurs $\eta \in \boldsymbol{L}$ de la forme $\eta = \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un ensemble dense partout dans tout l'espace $\boldsymbol{L}$, et pour n donné c'est un espace fermé.

Supposons pour le moment que pour n quelconque le système de grandeurs p_θ du type (7.1.15) $\left(\text{où } \theta = \sum_{k=1}^{n} c_k\theta_k,\ | c_k | \leqslant \delta_k,\ k = 1, \ldots, n,\ \delta_1, \ldots, \delta_n \text{ sont des nombres positifs et } \eta_\theta = \sum_{k=1}^{n} c_k\eta_k\right)$ est dense partout dans le sous-espace, formé par toutes les grandeurs mentionnées $\eta = \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Il est alors évident que l'enveloppe linéaire de toutes les grandeurs p_θ, $\theta \in \Theta$, sera dense partout dans

tout l'espace $\boldsymbol{L}$. Il suffit donc de démontrer que si

$$\mathbf{M}\eta p_\theta = \mathbf{M}_\theta \eta = C_\theta \int_{R^n} \varphi(y_1, \ldots, y_n) \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right\} \mathbf{P}(dy) = 0$$

pour tous les $\theta = \sum_{k=1}^{n} c_k \theta_k$ (où $\mathbf{P}(dy)$ est la distribution des grandeurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$ dans un espace à n dimensions), la fonction $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ est nulle presque partout par rapport à $\mathbf{P}(dy)$. Mais ce résultat est bien connu *) car les densités

$$\frac{\mathbf{P}_\theta(dy)}{\mathbf{P}(dy)} = C_\theta \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right\},$$

où $|c_k| \leqslant \delta_k$, $k = 1, \ldots, n$, forment une famille exponentielle. Ce qui achève la démonstration du lemme.

3. Estimations non biaisées. Les formules (7.1.12), (7.1.13) donnent la correspondance isométrique des espaces hilbertiens Y, $L_T(F)$ et $H(T)$ pour laquelle

$$\begin{gathered} y \in Y \leftrightarrow \varphi \in L_T(F) \leftrightarrow \eta \in H(T) \\ \langle y_1, y_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_F = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle. \end{gathered} \tag{7.1.17}$$

Comme précédemment, $H(T)$ désigne l'enveloppe linéaire des valeurs $\xi(t)$, $t \in T$, d'un processus gaussien, stationnaire par rapport à la distribution $\mathbf{P}$, où le produit scalaire est $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \mathbf{M}\eta_1\eta_2$, $\Phi(d\lambda)$ est la mesure spectrale stochastique correspondante, et la grandeur η dans (7.1.17) est liée aux fonctions $\varphi(\lambda)$ et $y(t)$ figurant dans (7.1.12) par l'égalité

$$\eta = \int \varphi(\lambda) \, \Phi(d\lambda). \tag{7.1.18}$$

Remarquons que puisque

$$B(s-t) = \int e^{-i\lambda t} e^{i\lambda s} F(d\lambda),$$

pour s quelconque la fonction $y_s(t) = B(s-t)$ de $t \in T$ appartient à l'espace Y, le système de toutes les fonctions y_s, $s \in T$, étant complet. La complétude de ce système découle en particulier du fait que le système de fonctions $e^{i\lambda s} \in L_T(F)$ correspondant aux fonctions $y_s \in Y$

$$y_s(t) = B(s-t) \leftrightarrow e^{i\lambda s} \leftrightarrow \xi(s)$$

est complet.

Conformément à la formule (7.1.16), chaque fonctionnelle du paramètre fonctionnel $\theta = \theta(t)$, $t \in T$, définie comme la valeur de

*) Voir, par exemple, [17].

la fonction $\theta = \theta(t)$ en un point donné $t \in T$, peut s'écrire comme suit :

$$\theta(t) = \langle e^{i\lambda t}, \varphi_\theta(\lambda)\rangle_F = \langle y_t, \theta\rangle. \tag{7.1.19}$$

On voit que la fonctionnelle $\theta(t)$ de $\theta \in \Theta$ se trouve prolongée en une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace hilbertien Y, précisément d'une manière univoque sur le sous-espace $\overline{\Theta} \subseteq Y$ qui est une enveloppe linéaire fermée des éléments $\theta \in \Theta$. Nous passons aux estimations non biaisées des fonctionnelles quelconques $\alpha = \alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$ qui sont une restriction sur $\Theta \subseteq Y$ d'une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace hilbertien Y, représentable par la formule générale

$$\alpha(\theta) = \langle y, \theta\rangle, \quad \theta \in \theta, \tag{7.1.20}$$

où $y = y(t)$, $t \in T$, est une fonction de l'espace Y.

Il est bon de noter que *pour qu'une fonctionnelle* $\alpha(\theta)$ *de* $\theta \in \Theta$ *admette une estimation linéaire non biaisée (c'est-à-dire une estimation* $\hat{\alpha} \in H(T)$ *telle que* $\mathbf{M}_\theta \hat{\alpha} \equiv \alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta$), *il faut et il suffit qu'elle soit une restriction sur* $\Theta \subseteq Y$ *d'une certaine fonctionnelle linéaire continue dans l'espace hilbertien* Y. En particulier, pour une fonctionnelle du type (7.1.19) l'estimation linéaire non biaisée est donnée par $\xi(t)$.

En effet, vu l'isomorphisme unitaire décrit dans (7.1.17), la formule (7.1.22) qui sera déduite ci-dessous donne pour une fonctionnelle du type (7.1.20) :

$$\alpha(\theta) = (y, \theta\rangle = \langle \eta, \eta_\theta\rangle = \mathbf{M}_\theta \eta, \quad \theta \in \Theta, \tag{7.1.21}$$

où $\eta \in H(T)$ est une grandeur du type (7.1.18), correspondant à la fonction $y \in Y$. D'un autre côté, à chaque $\eta \in H(T)$ de la forme $\eta = \int \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$ correspond une fonctionnelle $\alpha(\theta)$ du type (7.1.21) pouvant être étendue de l'ensemble $\theta \subseteq Y$ à tout l'espace Y. La fonction $y \in Y$ définissant cet espace est donnée par la formule

$$y(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\,F(d\lambda), \qquad t \in T.$$

L e m m e 4. *Quel que soit* $\theta \in \Theta$, *tout* $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$ *admet une espérance mathématique finie* $\mathbf{M}_\theta\eta$. *Pour les* η *appartenant au sous-espace* $H(T)$ *engendré par les grandeurs* $\xi(t)$, $t \in T$, *on a la formule suivante* :

$$\mathbf{M}_\theta \eta = \langle \eta, \eta_\theta\rangle, \quad \theta \in \Theta. \tag{7.1.22}$$

D é m o n s t r a t i o n. Toute grandeur $\eta \in H(T)$ en tant que limite de variables gaussiennes de la forme $\sum c_k \xi(t_k)$ est elle-même gaussienne. Par conséquent, sont gaussiennes toutes les grandeurs $\eta_\theta \in H(T)$ figurant dans la formule (7.1.15) de telle sorte que la densité $p_\theta = p_\theta(\omega)$ est de carré intégrable pour la mesure $\mathbf{P}$ (en

d'autres termes, $p_\theta = p_\theta(\omega)$ fait partie de l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}(T)$). Pour une grandeur bornée quelconque $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$ on a

$$\mathbf{M}_\theta\eta = \mathbf{M}\eta p_\theta = \langle \eta, p_\theta \rangle. \tag{7.1.23}$$

Pour une grandeur quelconque $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$, on peut choisir une suite de grandeurs bornées $\eta_1, \eta_2, \ldots$ convergeant vers η (dans l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}(T)$), fondamentale également au sens de la convergence en moyenne par rapport à la mesure $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{M}_\theta \mid \eta_m - \eta_n \mid = \langle \mid \eta_m - \eta_n \mid, \; p_\theta \rangle \leqslant \| \eta_m - \eta_n \| \cdot \| p_\theta \| \to 0$$

pour $m, n \to \infty$. Il est évident que la suite $\eta_1, \eta_2, \ldots$ converge en moyenne par rapport à $\mathbf{P}_\theta$ justement vers la grandeur η, car $\mathbf{P}_\theta$ est équivalente à la mesure $\mathbf{P}$. Par conséquent $\mathbf{M}_\theta \mid \eta \mid < \infty$ et l'espérance mathématique $\mathbf{M}_\theta\eta$ est donnée par (7.1.23). Pour les grandeurs $\xi(t)$, $t \in T$, on a simultanément les égalités suivantes (voir (7.1.4), (7.1.15) et (7.1.16)) :

$$\theta(t) = \mathbf{M}_\theta\xi(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_\theta(\lambda) F(d\lambda) = \langle \xi(t), \; \eta_\theta \rangle.$$

Pour $\eta = \xi(t)$, $t \in T$, on déduit de l'égalité obtenue

$$\mathbf{M}_\theta\eta = \langle \eta, \eta_\theta \rangle$$

que l'espérance mathématique $\mathbf{M}_\theta\eta$ de $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$, en tant que fonctionnelle continue linéaire du type (7.1.22) sur l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}(T)$ (engendré par les grandeurs $\xi(t)$, $t \in T$), peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{M}_\theta\eta = \langle \eta, p_\theta \rangle = \langle \eta, \eta_\theta \rangle.$$

On voit également que la grandeur $\eta_\theta \in H(T)$, figurant dans la formule (7.1.15), coïncide avec la projection de $p_\theta \in \boldsymbol{H}(T)$ sur le sous-espace $H(T)$. Le lemme est ainsi démontré.

Désignons par $\mathfrak{B}$ la σ-algèbre engendrée par toutes les grandeurs $\eta_\theta = \eta_\theta(\omega)$ sur Ω ($\theta \in \Theta$) ; désignons par $\boldsymbol{L}$ un sous-espace dans l'espace hilbertien $\boldsymbol{H}(T)$ formé par toutes les grandeurs $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$ mesurables par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$, et par L l'enveloppe linéaire fermée de toutes les η_θ ($\theta \in \Theta$).

Comme nous l'avons déjà mentionné, en vertu des formules (7.1.15), (7.1.16), on a

$$\eta_\theta = \sum c_k \eta_{\theta_k} \quad \text{pour} \quad \theta \quad \sum c_k \theta_k,$$

et par conséquent (voir formule (7.1.22)) pour une grandeur quelconque $\eta \in H(T)$ on a

$$\mathbf{M}_\theta\eta = \langle \eta, \eta_\theta \rangle = \sum_k c_k \langle \eta, \eta_{\theta_k} \rangle = \sum c_k \mathbf{M}_{\theta_k}\eta.$$

Ainsi, l'estimation linéaire non biaisée $\eta \in H(T)$ d'une fonctionnelle quelconque $\alpha(\theta)$ du type (7.1.20) (voir également (7.1.21)) donnée sur un ensemble paramétrique quelconque $\Theta \subseteq Y$ est en même

temps une estimation linéaire non biaisée du prolongement linéaire de $\alpha(\theta)$ sur l'enveloppe linéaire fermée $\bar{\Theta}$ de l'ensemble initial Θ. Ceci signifie que *lors de l'étude des estimations linéaires non biaisées, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que*

$$\Theta = \bar{\Theta}. \tag{7.1.24}$$

Sous cette hypothèse nous avons affaire à une famille complète de distributions $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ (voir lemme 3), la σ-algèbre nécessaire et suffisante pour le paramètre $\theta \in \Theta$ est la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ engendrée par les grandeurs $\eta_\theta = \eta_\theta(\omega)$ de la formule (7.1.15), c'est-à-dire par des grandeurs du type

$$\eta_\theta = \int \varphi_\theta(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{7.1.25}$$

où les fonctions $\varphi_\theta(\lambda) \in L_T(F)$ sont données par les équations intégrales (7.1.16):

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_\theta(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \quad t \in T$$

(le paramètre θ parcourt ici un système complet dans Θ).

Soient $\alpha(\theta)$ une fonctionnelle du paramètre inconnu $\theta \in \Theta$ décrite par la formule (7.1.20) et $\eta \in \boldsymbol{H}(T)$ une estimation linéaire non biaisée (voir (7.1.21)). Posons

$$\hat{\alpha} = \mathbf{M}(\eta/\mathfrak{B}). \tag{7.1.26}$$

La σ-algèbre $\mathfrak{B}$ étant suffisante pour le paramètre $\theta \in \Theta$, on a simultanément

$$\hat{\alpha} = \mathbf{M}_\theta(\eta/\mathfrak{B}), \quad \theta \in \Theta,$$

et

$$\mathbf{M}_\theta \hat{\alpha} = \mathbf{M}_\theta \eta = \alpha(\theta) \text{ pour tous les } \theta \in \Theta,$$

de plus

$$\mathbf{M}_\theta(\hat{\alpha} - \alpha(\theta))^2 = \mathbf{M}_\theta(\eta - \alpha(\theta))^2 - \mathbf{M}_\theta(\eta - \hat{\alpha})^2 \leqslant \mathbf{M}(\eta - \alpha(\theta))^2. \tag{7.1.27}$$

On voit que la grandeur $\hat{\alpha}$ donnée par la formule (7.1.26) est une estimation non biaisée « améliorée ». Cette grandeur $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\omega)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ et, le système de distributions $\mathbf{P}_\theta$ étant complet, se trouve être l'estimation unique de ce genre, car si $\eta = \eta(\omega)$ est l'estimation non biaisée de $\alpha(\theta)$ mesurable par rapport à $\mathfrak{B}$, on a

$$\mathbf{M}_\theta(\hat{\alpha} - \eta) = \mathbf{M}_\theta \hat{\alpha} - \mathbf{M}_\theta \eta = 0$$

pour tous les $\theta \in \Theta$, et par conséquent, on a effectivement $\hat{\alpha} = \eta$ (avec une probabilité 1 pour une distribution quelconque $\mathbf{P}_\theta$).

Pour les variables gaussiennes $\eta \in H(T)$ et η_θ $(\theta \in \Theta)$ la grandeur mentionnée $\hat{\alpha} = \mathbf{M}(\eta/\mathfrak{B})$ est la projection de η sur le sous-espace L,

engendré par les grandeurs $\eta_\theta \in H(T)$ du type (7.1.25) (voir § 5 du chapitre I).

Désignons par L_0 le complément orthogonal du sous-espace $L \subseteq H(T)$:

$$H(T) = L \oplus L_0.$$

Comme nous venons de le montrer, toutes les estimations non biaisées $\eta \in H(T)$ de $\alpha(\theta)$ ont même projection $\hat{\alpha}$ sur le sous-espace L et donc admettent la représentation

$$\eta = \alpha \oplus \Delta, \quad \Delta \in L_0. \tag{7.1.28}$$

D'un autre côté, pour $\Delta \in L_0$ quelconque on a d'après la formule (7.1.22)

$$\mathbf{M}_\theta \Delta = \langle \Delta, \eta_\theta \rangle = 0, \qquad \theta \in \Theta,$$

de sorte que toute grandeur du type (7.1.28) est une estimation linéaire non biaisée de la fonctionnelle $\alpha(\theta)$, l'estimation $\hat{\alpha} \in L$ (voir (7.1.27)) étant la meilleure parmi toutes les estimations.

Il est bon de se référer aux relations (7.1.17). Les fonctions $\theta \in Y$ correspondent aux grandeurs $\eta_\theta \in H(T)$, de sorte que (7.1.17) définissent l'isomorphisme unitaire entre les sous-espaces $L \subseteq H(T)$ et $\Theta \subseteq Y$ pour lequel

$$\eta_\theta \in L \leftrightarrow \theta \in \Theta. \tag{7.1.29}$$

La fonctionnelle linéaire continue $\alpha(\theta)$ de θ est définie d'une manière univoque sur le sous-espace $\Theta \subseteq Y$ par la formule

$$\alpha(\theta) = \langle \theta_\alpha, \theta \rangle, \ \theta \in \Theta, \tag{7.1.30}$$

où $\theta_\alpha = \theta_\alpha(t)$, $t \in T$, est une fonction de Θ donnant la fonctionnelle $\alpha(\theta)$. En vertu de la formule (7.1.17) (voir également (7.1.21)) à cette fonction $\theta_\alpha \in \Theta$ correspond une estimation linéaire non biaisée η des sous-espaces L coïncidant avec la meilleure estimation $\hat{\alpha}$. Ainsi

$$\hat{\alpha} = \int \varphi_\alpha(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{7.1.31}$$

où $\varphi_\alpha(\lambda) \in L_T(F)$ est la solution de l'équation intégrale du type (7.1.16):

$$\theta_\alpha(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_\alpha(\lambda)\, F(d\lambda), \quad t \in T, \tag{7.1.32}$$

$\theta_\alpha(t)$ figurant dans la formule (7.1.30) pour la fonctionnelle étudiée $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$.

Théorème 1. *Pour qu'une fonction $\alpha(\theta)$ du paramètre inconnu $\theta \in \Theta$ ait une estimation linéaire non biaisée $\eta \in H(T)$ il faut et il suffit que $\alpha(\theta)$ soit une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace*

hilbertien $\Theta \subseteq Y$. *Soit* $\alpha(\theta)$ *une telle fonctionnelle donnée par la formule* (7.1.30). *La meilleure estimation non biaisée* $\hat{\alpha}$ *de* $\alpha(\theta), \theta \in \Theta$, *est donnée par la formule* (7.1.31). *L'ensemble de toutes les estimations linéaires non biaisées* η *de* $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *est, du point de vue géométrique, un hyperplan dans l'espace* $H(T)$ *de la forme*

$$L_\alpha = \hat{\alpha} \oplus L_0 \tag{7.1.33}$$

(voir (7.1.28)), *où* L_0 *est le complément orthogonal du sous-espace* $L \subseteq H(T)$ *engendré par des grandeurs* η_θ *du type* (7.1.25). *Le sous-espace* L *représente l'ensemble de toutes les meilleures estimations* $\hat{\alpha}$ (*pour différentes fonctionnelles linéaires* $\alpha(\theta)$ *de* $\theta \in \Theta$). *Les estimations* $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$ de $\alpha_1(\theta), \ldots, \alpha_n(\theta)$ *sont les meilleures en ce sens que leur matrice de corrélation* $\{s_{ij}\}$, $s_{ij} = \mathbf{M}_\theta(\hat{\alpha}_i - \alpha_i(\theta))(\hat{\alpha}_j - \alpha_j(\theta))$, *est la moindre parmi les matrices de corrélation* $\{\sigma_{ij}\}$ *de toutes les autres estimations non biaisées* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ($\sigma_{ij} = \mathbf{M}_\theta(\eta_i - \alpha_i(\theta))(\eta_j - - \alpha_j(\theta))$, *à savoir*

$$\{s_{ij}\} \leqslant \{\sigma_{ij}\} \tag{7.1.34}$$

(*c'est-à-dire que la matrice* $\{s_{ij}\} - \{\sigma_{ij}\}$ *est définie négative*).

D é m o n s t r a t i o n. Hormis l'inégalité (7.1.34), toutes les assertions du théorème 1 ont été démontrées ci-dessus. Quant à l'inégalité (7.1.34), elle découle du fait que la combinaison linéaire des meilleures estimations $\hat{\alpha} = \sum c_k \hat{\alpha}_k$ appartient, en même temps que les estimations $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$, au sous-espace L et se trouve être la meilleure estimation non biaisée de la fonctionnelle correspondante $\alpha(\theta) = \sum c_k \alpha_k(\theta)$ de $\theta \in \Theta$. En comparant $\hat{\alpha}$ avec l'estimation non biaisée $\eta = \sum c_k \eta_k$ on obtient à l'aide de l'inégalité (7.1.27):

$$\mathbf{M}_\theta(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}(\theta))^2 = \sum_{i,j} c_i c_j s_{ij} \leqslant \mathbf{M}_\theta(\eta - \alpha(\theta))^2 = \sum_{ij} c_i c_j \sigma_{ij}.$$

Les coefficients $c_1, \ldots, c_n$ étant quelconques, on en déduit l'inégalité (7.1.34). Le théorème se trouve donc démontré.

Il est bon de remarquer que pour des grandeurs quelconques $\eta_1, \eta_2 \in H(T)$ on a

$$\mathbf{M}_\theta(\eta_1 - \mathbf{M}_\theta \eta_1)(\eta_2 - \mathbf{M}_\theta \eta_2) = \mathbf{M}\eta_1\eta_2. \tag{7.1.35}$$

Supposons maintenant que $\theta_1, \theta_2, \ldots$ soit une base dans le sous-espace $\Theta \subseteq Y$, c'est-à-dire un système d'éléments complet dans Θ tel que pour des nombres réels quelconques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ on ait

$$\|\sum_k \alpha_k \theta_k\|^2 \asymp \sum_k \alpha_k^2.$$

Soit $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots$ un système conjugué d'éléments:

$$\langle \theta_k^*, \theta_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = j, \\ 0 & \text{pour } k \neq j. \end{cases}$$

Chaque élément $\theta \in \Theta$ peut être représenté d'une manière univoque sous la forme

$$\theta = \sum_k \alpha_k \theta_k,$$

où $\alpha_k = \langle \theta_k^*, \theta \rangle$ et $\sum_k \alpha_k^2 \asymp \| \theta \|^2$, de plus pour des $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ réels quelconques satisfaisant à la condition $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$, la série $\sum_k \alpha_k \theta_k$ converge rapidement et sa somme se trouve être un élément $\theta \in \Theta$. Le système conjugué $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots$ est également une base *).

Théorème 2. *Soit* $\alpha = \alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta$, *une fonctionnelle linéaire continue sur le sous-espace* $\Theta \subseteq Y$ *donnée par la formule* (7.1.30). *La fonction la définissant* $\theta_\alpha = \theta_\alpha(t)$, $t \in T$, *admet alors la représentation par la série*

$$\theta_\alpha = \sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \theta_k, \tag{7.1.36}$$

et la meilleure estimation non biaisée $\hat{\alpha}$ *par la série correspondante*

$$\hat{\alpha} = \sum_k \alpha(\theta_k)\, \eta_k, \tag{7.1.37}$$

où $\eta_1, \eta_2, \ldots$, *éléments du sous-espace* $L \subseteq H(T)$ *correspondant suivant la formule* (7.1.29) *aux éléments* $\theta_1, \theta_2, \ldots$, *du sous-espace* $\Theta \subseteq Y$, *sont les meilleures estimations non biaisées des fonctionnelles du type* $\alpha_k^*(\theta) = \langle \theta_k, \theta \rangle$ de $\theta \in \Theta$. *La série* (7.1.37) *converge en moyenne quadratique par rapport à chacune des mesures de probabilité* $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$.

Démonstration. Les éléments $\theta_1, \theta_2, \ldots$ sont une base, et la fonction $\theta_\alpha = \theta_\alpha(t)$, $t \in T$, peut être représentée comme la série

$$\theta_\alpha = \sum_k \langle \theta_\alpha, \theta_k^* \rangle\, \theta_k = \sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \theta_k.$$

Vu la correspondance (7.1.29) entre $\Theta \subseteq Y$ et $L \subseteq H(T)$, la base $\theta_1, \theta_2, \ldots$ du sous-espace Θ devient la base $\eta_1, \eta_2, \ldots$ du sous-espace L, de telle sorte que la meilleure estimation non biaisée $\alpha \in L$ de la fonctionnelle $\alpha = \alpha(\theta)$, correspondant à l'élément $\theta_\alpha \in \Theta$, s'écrit sous la forme de la série (7.1.37) :

$$\alpha = \sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \eta_k.$$

Pour $\alpha(\theta) = \langle \theta, \theta_k \rangle$ à partir de l'expression (7.1.37) on obtient que $\alpha = \eta_k$, c'est-à-dire que η_k est la meilleure estimation non biaisée de la fonction $\alpha_k^*(\theta) = \langle \theta, \theta_k \rangle$, $\theta \in \Theta$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Enfin,

*) Voir, par exemple, [4].

la convergence rapide de la série (7.1.37) équivaut à la convergence en moyenne (par rapport à la mesure de probabilité **P**), ce qui, compte tenu de la convergence de la série des valeurs moyennes

$$\sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \mathbf{M}_\theta \eta_k = \sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \langle \eta_k, \eta_\theta \rangle = \sum_k \alpha(\theta_k^*)\, \langle \theta_k, \theta \rangle = \langle \theta_\alpha, \theta \rangle = \alpha(\theta),$$

équivaut à la convergence en moyenne quadratique par rapport à une mesure quelconque $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Le théorème se trouve donc démontré.

Notons que, si la base initiale $\theta_1, \theta_2, \ldots$ du sous-espace $\Theta \subseteq Y$ est orthonormée, pour des fonctionnelles linéaires quelconques $\alpha_1 = \alpha_1(\theta)$ et $\alpha_2 = \alpha_2(\theta)$ de $\theta \in \Theta$ on a la formule suivante:

$$\mathbf{M}_\theta [\alpha_1 - \alpha_1(\theta)]\, [\alpha_2 - \alpha_2(\theta)] = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \sum_k \alpha_1(\theta_k)\, \alpha_2(\theta_k). \tag{7.1.38}$$

En particulier, les meilleures estimations non biaisées $\hat{\theta}(t)$, $t \in T$, des fonctionnelles $\theta(t)$ de $\theta \in \Theta$ du type (7.1.19) (où le paramètre t parcourt l'ensemble T) par rapport à chacune des mesures de probabilité $\mathbf{P}_\theta$ forment un processus aléatoire de valeur moyenne $\theta(s)$, $t \in T$, et de fonction de corrélation

$$\mathbf{M}_\theta [\hat{\theta}(s) - \theta(s)]\, [\hat{\theta}(t) - \theta(t)] = \sum_k \theta_k(s)\, \theta_k(t), \tag{7.1.39}$$

où les fonctions $\theta_k = \theta_k(t)$ de $t \in T$, $k = 1, 2, \ldots$, forment une base orthonormée dans le sous-espace Θ de l'espace fonctionnel Y.

Considérons le problème de l'estimation des coefficients de régression (voir point 1). Supposons que le sous-espace soit de dimension finie N. Dans ce cas N éléments quelconques de Θ, linéairement indépendants, forment une base dans Θ, tout comme N éléments quelconques linéairement indépendants du sous-espae L forment une base dans L. Si $\theta_1, \ldots, \theta_N$ est une base dans Θ, tout élément $\theta \in \Theta$ peut s'écrire comme

$$\theta = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k,$$

où $\alpha_k = \langle \theta_k^*, \theta \rangle$, $k = 1, \ldots, N$, sont les *coefficients de régression* dans (7.1.1), et $\theta_1^*, \ldots, \theta_N^*$ est un système conjugué de $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_N$ les grandeurs du sous-espace L, correspondant suivant la formule (7.1.29) aux éléments $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Ces grandeurs peuvent être définies par la formule (7.1.25):

$$\eta_k = \int \varphi_k(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \quad k = 1, \ldots, n,$$

où $\varphi_k(\lambda) \in L_T(F)$ est la solution de l'équation du type (7.1.16)

$$\theta_k(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_k(\lambda)\, F(d\lambda), \quad t \in T.$$

Les grandeurs η_k sont les meilleures estimations non biaisées des fonctionnelles $\alpha_k^*(\theta) = \langle \theta_k, \theta \rangle$ de $\theta \in \Theta$. D'une manière analogue, aux éléments θ_k^* correspondent les meilleures estimations non biaisées $\hat{\alpha}_k$ des coefficients $\alpha_k = \langle \theta_k^*, \theta \rangle$, $k = 1, \ldots, N$. Vu l'isomorphisme (7.1.29), ces meilleures estimations $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_N$ forment un système conjugué de $\eta_1, \ldots, \eta_N$:

$$\langle \hat{\alpha}_k, \eta_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = j, \\ 0 \text{ pour } k \neq j. \end{cases}$$

Les grandeurs $\eta_1, \ldots, \eta_N$ étant une base dans le sous-espace $L \subseteq H(T)$, en utilisant la représentation

$$\hat{\alpha}_i = \sum_j s_{ij} \eta_j \ (k = 1, \ldots, N), \tag{7.1.40}$$

on définit les coefficients s_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N)$ des équations

$$\sum_j s_{ij} \langle \eta_j, \eta_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k, \\ 0 \text{ pour } i \neq k. \end{cases}$$

On voit que la matrice $\{s_{ij}\}$ est inverse à la matrice de corrélation $\{\langle \eta_i, \eta_k \rangle\}$, où

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_F = \int \varphi_i(\lambda) \overline{\varphi_j(\lambda)} F(d\lambda), \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{7.1.41}$$

Compte tenu de (7.1.40) il est facile de calculer également que $\{s_{ij}\}$ coïncide avec la matrice de corrélation des meilleures estimations $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_N$:

$$M_\theta (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)(\hat{\alpha}_j - \alpha_j) = \langle \hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j \rangle = s_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{7.1.42}$$

Pour conclure remarquons que la meilleure estimation non biaisée d'une fonctionnelle du type (7.1.19), déterminée comme la valeur moyenne de $\theta(t)$ en un point *donné* $t \in T$ et étant une combinaisonre linéaire $\theta(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k(t)$, est représentable sous la forme (7.1.8):

$$\hat{\theta}(t) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\alpha}_k \theta_k(t), \quad t \in T.$$

§ 2. Sur les estimations de la valeur moyenne. Méthode des moindres carrés

Comme nous l'avons déjà noté, la condition d'équivalence de toutes les distributions gaussiennes envisagées P_θ, $\theta \in \Theta$, de valeurs moyennes $\theta = \theta(t)$, $t \in T$, équivaut à ce que chacune des fonctions

$\theta = \theta(t)$ admet la représentation (7.1.16) signifiant que $\theta = \theta(t)$ est une restriction d'une fonctionnelle linéaire continue $\langle \varphi, \varphi_\theta \rangle_F$ de $\varphi \in L_T(F)$ aux éléments $e^{i\lambda t} \in L_T(F)$. Il est clair que dans ce cas $\theta = \theta(t)$ admet une représentation analogue par rapport à toute mesure spectrale $G(d\lambda)$ pour laquelle l'espace correspondant $L_T(G)$ est contenu dans $L_T(F)$ et $\| \varphi \|_F \leqslant \| \varphi \|_G$ pour tous les $\varphi(\lambda) \in \in L_T(G)$.

Si A, défini par l'égalité $A\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)$, est un opérateur de l'espace hilbertien $L_T(G)$ dans l'espace hilbertien $L_T(F)$, la condition mentionnée signifie que l'opérateur $B = A^*A$ est borné dans $L_T(G)$ (A^* étant l'opérateur conjugué de A). Sous cette condition, comme nous venons de le noter, la fonction $\theta(t)$, $t \in T$, peut être représentée comme suit :

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t} \psi_\theta(\lambda)\, G(\delta\lambda), \quad t \in T, \tag{7.2.1}$$

où $\psi_\theta(\lambda) \in L_T(G)$.

Si cet opérateur $B = A^*A$ est nucléaire, la représentation du type (7.2.1) est également vraie pour le processus gaussien étudié $\xi = \xi(t)$, $t \in T$ (stationnaire par rapport à la distribution **P**) : avec la probabilité 1 on a

$$\xi(t) = \int e^{-i\lambda t} \eta(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T \tag{7.2.2}$$

(voir à ce sujet le § 6 du chapitre I), où $\eta = \eta(\lambda)$ est une fonction aléatoire gaussienne à trajectoires dans l'espace hilbertien $L_T(G)$. Comme toutes les distributions initiales $\mathbf{P}_\theta$ sont équivalentes, la représentation (7.2.2) est également vraie (avec la probabilité 1) par rapport à toute distribution $\mathbf{P}_\theta$, dans ce cas la distribution correspondante de la fonction aléatoire $\eta(\lambda) \in L_T(G)$ est gaussienne de valeur moyenne $\psi_\theta(\lambda) \in L_T(G)$ et son opérateur de corrélation coïncide avec l'opérateur $B = A^*A$ mentionné ci-dessus.

En effet,

$$\theta(t) = \mathbf{M}_\theta \xi(t) = \int e^{-i\lambda t} \mathbf{M}_\theta \eta(\lambda)\, G(d\lambda) = \int e^{-i\lambda t} \psi_\theta(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T.$$

Comme la représentation (7.2.1) est unique il vient

$$\mathbf{M}_\theta \eta(\lambda) = \psi_\theta(\lambda); \tag{7.2.3}$$

de plus (voir § 6, chapitre I) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\theta [\langle \varphi, \eta \rangle_G - \langle \varphi, \psi_\theta \rangle_G] [\langle \psi, \eta \rangle_G - \langle \psi, \psi_\theta \rangle_G] = \\ = \mathbf{M} [\langle \varphi, \eta \rangle_G \langle \psi, \eta \rangle_G] = \mathbf{M} [\eta(\varphi)\, \eta(\psi)] = \\ = \langle \varphi, \psi \rangle_F = \langle A\varphi, A\psi \rangle_F = \langle A^*A\varphi, \psi \rangle_G = \langle B\varphi, \psi \rangle_G, \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

où (voir formule (1.6.9))

$$\eta(\varphi) = \int \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \langle \varphi, \eta \rangle_G, \quad \varphi \in L_T(G).$$

Considérons le processus aléatoire $\xi = \xi(t)$, $t \in T$, « observé » comme un élément de l'espace hilbertien X composé de fonctions du type

$$x(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T, \qquad (7.2.5)$$
$$\varphi(\lambda) \in L_T(G),$$

de produit scalaire

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_G \qquad (7.2.6)$$

et estimons de plusieurs façons la valeur moyenne inconnue $\theta = \theta(t)$, $t \in T$, en tant qu'élément du même espace X.

Ci-dessus nous avons montré (voir (7.1.24)) que, lors de l'étude des estimations non biaisées, sans restreindre la généralité, on peut considérer que l'ensemble paramétrique Θ est un sous-espace fermé dans l'espace hilbertien Y, analogue à l'espace hilbertien X, qui vient d'être introduit, mais muni de la mesure spectrale $F(d\lambda)$, mesure spectrale du processus aléatoire $\xi = \xi(t)$ stationnaire par rapport à **P**. Mais l'ensemble Θ, en tant que sous-espace dans l'espace hilbertien X, est en général non fermé. De plus,

pour que le sous-espace $\Theta \subseteq X$ soit fermé il faut et il suffit qu'il soit de dimension finie.

En effet, l'opérateur de l'espace hilbertien Y dans l'espace hilbertien X déterminant l'application

$$y(t) \in Y \to y(t) \in X$$

coïncide en fait avec l'opérateur conjugué A^*, plus exactement, avec l'opérateur A^* dans Y coïncidant sur les fonctions $y \in Y$ avec les valeurs $A^*y \in Y$, qui d'après la formule (7.1.17) correspondent aux valeurs $A^*\varphi$, où $\varphi \in L_T(F)$ correspond à $y \in Y$:

$$y(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda)\, F(d\lambda) = \langle e^{i\lambda t}, \varphi\rangle_F =$$
$$= \langle Ae^{i\lambda t}, \varphi\rangle_F = \langle e^{i\lambda t}, A^*\varphi\rangle_G = \int e^{-i\lambda t}\,[A^*\varphi(\lambda)]\, G(d\lambda).$$

Ainsi, si le sous-espace Θ est fermé dans X (si le sous-espace $A^*\Theta \subseteq X$ est fermé) l'application biunivoque

$$\theta(t) \in Y \overset{A^*}{\longleftrightarrow} \theta(t) \in X$$

fait correspondre le sous-espace fermé $\Theta \subseteq Y$ au sous-espace également fermé $A^*\Theta \subseteq X$, et par conséquent, d'après le théorème de Banach, il doit exister un opérateur inverse borné $(A^*)^{-1}$. Mais l'opérateur $B = A^*A$ étant nucléaire, pour que l'opérateur inverse borné de A^* éxiste, il faut et il suffit que le sous-espace Θ soit de dimension finie.

Désignons par $\tilde{\Theta}$ la fermeture de Θ dans l'espace hilbertien X et considérons une estimation non biaisée arbitraire $\eta \in X$ du paramètre $\theta \in \Theta$ à valeurs dans X:

$$\mathbf{M}_\theta \eta = \theta, \ \theta \in \Theta.$$

La condition que l'estimation $\eta \in X$ est non biaisée signifie que $\mathbf{M}_\theta \langle \eta, x \rangle = \langle \theta, x \rangle$ pour $x \in X$ quelconque. Si $\theta_1, \theta_2, \ldots$ est une base orthonormée dans le sous-espace $\Theta \subseteq X$, et $x_1, x_2, \ldots$ la complète jusqu'à une base orthonormée dans tout l'espace X, alors

$$\eta = \sum_k \langle \eta, \theta_k \rangle \theta_k + \sum_k \langle \eta, x_k \rangle x_k$$

et

$$\mathbf{M}_\theta \eta = \sum_k [\mathbf{M}_\theta \langle \eta, \theta_k \rangle] \theta_k + \sum_k [\mathbf{M}_\theta \langle \eta, x_k \rangle] x_k =$$

$$= \sum_k \langle \theta, \theta_k \rangle \theta_k + \sum_k \langle \theta, x_k \rangle x_k = \sum_k \langle \theta, \theta_k \rangle \theta_k = \theta.$$

On voit ainsi que

la projection $\tilde{\eta}$ de l'estimation non biaisée η sur le sous-espace $\tilde{\Theta}$ est également une estimation non biaisée de la valeur moyenne inconnue :

$$\tilde{\eta} = \sum_k \langle \eta, \ \theta_k \rangle \theta_k$$

et

$$\mathbf{M}_\theta \tilde{\eta} = \sum_k \langle \theta, \ \theta_k \rangle \theta_k = \theta, \quad \theta \in \Theta.$$

Les grandeurs $\eta - \tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta} - \theta$ étant orthogonales, on a

$$\| \eta - \theta \|^2 = \| \tilde{\eta} - \theta \|^2 + \| \eta - \tilde{\eta} \|^2$$

et

$$\mathbf{M}_\theta \| \tilde{\eta} - \theta \|^2 = \mathbf{M}_\theta \| \eta - \theta \|^2 = \mathbf{M}_\theta \| \eta - \tilde{\eta} \|^2 \leqslant \mathbf{M}_\theta \| \eta - \theta \|^2 \tag{7.2.7}$$

On voit que

$\tilde{\eta} \in \tilde{\Theta}$ *est une estimation « améliorée » par rapport à l'estimation initiale* $\eta \in X$.

L'estimation non biaisée la plus simple du paramètre $\theta \in \Theta$ est donnée par ξ. Désignons par $\tilde{\xi}$ sa projection sur le sous-espace $\tilde{\Theta}$:

$$\tilde{\xi} = \sum_k \langle \xi, \theta_k \rangle \theta_k. \tag{7.2.8}$$

Pour l'estimation non biaisée $\tilde{\xi}$, appelée *estimation des moindres carrés*, on a

$$\mathbf{M}_\theta \| \tilde{\xi} - \theta \|^2 = \sum_k \mathbf{M}_\theta (\langle \xi, \ \theta_k \rangle - \langle \theta, \ \theta_k \rangle)^2 =$$

$$= \sum_k \langle B^* \theta_k, \ \theta_k \rangle < \infty, \tag{7.2.9}$$

car l'opérateur de corrélation B^* de la variable gaussienne $\xi \in X$ est nucléaire (voir § 4, chapitre I).

Chacune des grandeurs réelles $\eta_k = \langle \xi, \theta_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$, est une estimation non biaisée de la fonctionnelle $\alpha_k(\theta) = \langle \theta, \theta_k \rangle$ de $\theta \in \Theta$. Les meilleures estimations non biaisées $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, de $\alpha_k(\theta)$ sont décrites par le théorème 1. Pour ces estimations on a

$$\mathrm{M}_\theta (\hat{\alpha}_k - \langle \theta, \theta_k \rangle)^2 \leqslant \mathrm{M}_\theta(\langle \xi, \theta_k \rangle - \langle \theta, \theta_k \rangle)^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.2.10}$$

Les relations (7.2.9) et (7.2.10) donnent

$$\mathrm{M} \sum_k \hat{\alpha}_k^2 = \sum_k \mathrm{M}\hat{\alpha}_k^2 \leqslant \sum_k \mathrm{M}\langle \xi, \theta_k \rangle^2 = \sum_k \langle B^*\theta_k, \theta_k \rangle < \infty$$

et donc avec la probabilité 1 on a

$$\sum_k \hat{\alpha}_k^2 < \infty. \tag{7.2.11}$$

Considérons la grandeur $\hat{\theta} \in \widetilde{\Theta}$ définie avec la probabilité 1 par la formule

$$\hat{\theta} = \sum_k \hat{\alpha}_k \theta_k, \tag{7.2.12}$$

où $\hat{\alpha}_k$ sont les meilleures estimations des coefficients $\alpha_k(\theta) = \langle \theta, \theta_k \rangle$.

Il est clair que $\hat{\theta}$ est une estimation non biaisée de la valeur moyenne inconnue $\theta \in \Theta$, et quelle que soit l'estimation non biaisée $\eta \in X$, en vertu de l'inégalité (7.1.27) on a

$$\mathrm{M}_\theta \| \hat{\theta} - \theta \|^2 = \sum_k \mathrm{M}_\theta (\hat{\alpha}_k - \langle \theta, \theta_k \rangle)^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_k \mathrm{M}_\theta (\langle \eta, \theta_k \rangle - \langle \theta, \theta_k \rangle)^2 \leqslant \mathrm{M}_\theta \| \eta - \theta \|^2, \tag{7.2.13}$$

de sorte que la grandeur $\hat{\theta}$ est la meilleure (dans le sens de l'inégalité (7.2.13) obtenue) estimation non biaisée du paramètre $\theta \in \Theta$.

Théorème 3. *La meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta}$ d'un paramètre inconnu $\theta \in \Theta$ existe ; en tant qu'élément de l'espace fonctionnel X elle peut s'écrire comme*

$$\hat{\theta}(t) = \int e^{-i\lambda t} \hat{\eta}(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T, \tag{7.2.14}$$

où $\hat{\eta}(\lambda) \in L_T(G)$. Pour tout $t \in T$ donné, la quantité $\hat{\theta}(t)$ donne la meilleure estimation non biaisée de la valeur $\theta(t)$ de la moyenne inconnue $\theta \in \Theta$. Le processus aléatoire $\hat{\theta}(t)$, $t \in T$, s'obtient par transformation linéaire du processus aléatoire « observé » $\xi(t)$, $t \in T$, définie par la formule

$$\hat{\theta}(t) = \mathscr{P}\xi(t), \quad t \in T, \tag{7.2.15}$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur de projection dans l'espace H (T) sur le sous-espace L, engendré par des grandeurs du type (7.1.25). *Le processus aléatoire* $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ *admet le développement suivant* (voir (7.1.31)) :

$$\hat{\theta}(t) = \int \varphi(\lambda, t)\, \Phi(d\lambda), \tag{7.2.16}$$

où $\varphi(\lambda, t)$ est la projection de l'élément $e^{i\lambda t} \in L_T(F)$ sur le sous-espace engendré par toutes les fonctions $\varphi_\theta(\lambda)$ figurant dans la formule (7.1.16). *La grandeur $\hat{\eta}(\lambda) \in L_T(G)$ dans la représentation* (7.2.14) *vaut avec la probabilité* 1

$$\hat{\eta}(\lambda) = \sum_k \hat{\alpha}_k \varphi_k(\lambda), \tag{7.2.17}$$

où $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, sont les mêmes coefficients aléatoires que dans la formule initiale (7.2.12) *et les fonctions $\varphi_k(\lambda) \in L_T(G)$ correspondent aux éléments $\theta_k \in X$:*

$$\theta_k(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_k(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T, \tag{7.2.18}$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (7.2.18), on a

$$\theta_k(t) = \langle e^{i\lambda t}, \quad \varphi_k(\lambda) \rangle, \quad t \in T,$$

où φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, est un système orthonormé dans l'espace $L_T(G)$, car θ_k, $k = 1, 2, \ldots$, est un système orthonormé dans l'espace X. Donc

$$\sum_k \theta_k(t)^2 \leqslant \| e^{i\lambda t} \|_G^2 < \infty$$

pour tout $t \in T$ donné, et, comme $\sum_k \hat{\alpha}_k^2 < \infty$ avec la probabilité 1 (voir (7.2.11)), la série

$$\hat{\theta}(t) = \sum_k \hat{\alpha}_k \theta(t), \quad t \in T, \tag{7.2.19}$$

pour chaque $t \in T$ donné converge également avec la probabilité 1. Il est évident que la grandeur $\hat{\theta}(t)$, pour t fixé, en tant que limite pour $n \to \infty$ des grandeurs $\sum_{k=1}^{n} \hat{\alpha}_k \theta_k(t)$ de l'espace fermé $L \subseteq H(T)$, appartient à L et se trouve être la meilleure estimation non biaisée du paramètre inconnu

$$\theta(t) = \mathrm{M}_\theta \hat{\theta}(t) = \sum_k [\mathrm{M}_\theta\, \hat{\alpha}_k]\, \theta_k(t), \quad t \in T.$$

Toutes ces estimations sont décrites dans le théorème 1 d'où découlent les formules (7.2.15), (7.2.16). Le théorème est démontré.

Il existe donc la meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ reproduisant plus exactement que les autres le paramètre fonctionnel inconnu $\theta = \theta(t)$ du sous-espace $\Theta \in X$. Cette estimation $\hat{\theta} \in X$ fait partie de la fermeture $\widetilde{\Theta}$ de Θ (voir formule (7.2.12)). Remarquons aussi le résultat suivant.

Théorème 4. *La meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta}$ appartient au sous-espace initial Θ, si et seulement si Θ est de dimension finie.*

Démonstration. D'après la formule (7.2.16)

$$\hat{\theta}(t) = \int [\mathcal{P} e^{i\lambda t}] \, \Phi(d\lambda), \quad t \in T,$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur de projection dans l'espace hilbertien $L_T(F)$ sur le sous-espace L engendré par toutes les fonctions $\varphi_\theta(\lambda)$ liées à $\theta \in \Theta$ par les égalités (7.1.16). Θ étant un sous-espace de l'espace hilbertien Y, il y a un isomorphisme unitaire entre L et Θ (voir (7.1.29)). Si avec une probabilité positive, les trajectoires d'un processus aléatoire équivalent $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$, $t \in T$, entrent dans Y, il existe une fonction gaussienne $\zeta(\lambda) \in L_T(F)$ telle qu'avec la probabilité 1 on ait l'estimation

$$\hat{\theta}(t) = \langle e^{i\lambda t}, \zeta(\lambda) \rangle_F, \quad t \in T$$

(voir § 6 du chapitre I), dont l'opérateur de corrélation se déduit des relations

$$\mathbf{M}[\langle e^{i\lambda s}, \zeta(\lambda)\rangle_F \langle e^{i\lambda t}, \zeta(\lambda)\rangle_F] = \mathbf{M}[\hat{\theta}(s)\hat{\theta}(t)] =$$
$$= \langle \mathcal{P} e^{i\lambda s}, \mathcal{P} e^{i\lambda t}\rangle_F = \langle \mathcal{P}^* \mathcal{P} e^{i\lambda s}, e^{i\lambda t}\rangle_F, \quad s, t \in T.$$

On voit que l'opérateur de corrélation est $\mathcal{P}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}$. L'opérateur de corrélation doit être nucléaire (voir théorème 1 du chapitre I), or l'opérateur de projection $\mathcal{P}$ n'est doué de cette proprieté que si le sous-espace L (et par conséquent l'espace Θ qui lui est isomorphe par un isomorphisme unitaire) est de dimension finie. Le théorème est démontré.

Nous allons nous arrêter sur le cas à dimension finie. La meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ d'une valeur moyenne inconnue $\theta = \theta(t)$, $t \in T$, peut s'écrire comme

$$\hat{\theta} = \sum_{k=1}^{N} \eta_k \theta_k,$$

où $\eta_k = \hat{\alpha}_k$ sont les meilleures estimations non biaisées des coefficients $\alpha_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$, $\theta \in \Theta$, dans le développement

$$\theta = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k$$

de l'élément $\theta \in \Theta$ suivant les éléments de base $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Dans le cas d'une base orthonormée $\theta_1, \ldots, \theta_N$ les estimations correspondantes $\eta_1, \ldots, \eta_N$ sont des variables gaussiennes indépendantes de même variance (égale à 1) (voir théorème 2).

La meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta}$ est le point de maximum de la fonction de vraisemblance $l(\theta)$ = $\log p_\theta$ de $\theta \in \Theta$, où $p_\theta = p_\theta(\omega)$ est la densité $\mathbf{P}_\theta(d\omega)/\mathbf{P}(d\omega)$ donnée par la formule (7.1.15) :

$$l(\theta) = \eta_\theta - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 = \sum_k \alpha_k \eta_k - \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k^2.$$

En effet, on peut voir que la fonction $l(\theta)$ admet un maximum pour $\alpha_k = \eta_k$ $(k = 1, \ldots, N)$:

$$\max_{\theta \in \Theta} l(\theta) = \frac{1}{2}\sum_k \eta_k^2 = l(\hat{\theta}).$$

Il y a lieu de remarquer que la méthode du maximum de vraisemblance n'est pas applicable au cas d'un espace de d i m e n s i o n i n f i n i e, quand le processus gaussien $l(\theta)$, $\theta \in \Theta$, n'est pas borné.

C'est ce qu'on peut voir immédiatement à partir de la relation suivante : avec la probabilité 1

$$\sup_{\theta \in \Theta} l(\theta) \geqslant \sup(\eta_1, \eta_2, \ldots) - \frac{1}{2} = \infty,$$

où η_k, $k = 1, 2, \ldots$, est une suite infinie de variables gaussiennes indépendantes de variance unité et de valeurs moyennes $\alpha_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$ telles que $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$; $\theta_1, \theta_2, \ldots$ est ici une base orthonormée dans le sous-espace $\Theta \subseteq Y$ de dimension infinie, et $\eta_1, \eta_2, \ldots$ les grandeurs correspondantes dans le sous-espace $L \subseteq H(T)$ (voir théorème 2).

Il faut dire également que les conditions d'extrémum formelles pour la fonction de vraisemblance $l(\theta)$ de $\theta = \sum_k \alpha_k \Theta_k$, soit

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

donnent les meilleures estimations non biaisées $\eta_k = \hat{\alpha}_k$ des coefficients correspondants $\alpha_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, mais comme les « coefficients » $\hat{\alpha}_k = \eta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, sont tels que, avec la probabilité 1, la série $\Sigma\, \eta_k^2$ diverge, dans l'espace hilbertien Y il n'y a pas d'élément représentable par la série $\Sigma\, \hat{\alpha}_k \theta_k$. Il est vrai que pour tout $t \in T$ donné la meilleure estimation non biaisée $\hat{\theta}(t)$ peut être représentée par la série convergente (7.2.19) :

$$\hat{\theta}(t) = \sum_k \eta_k \theta_k(t).$$

Dans nos raisonnements précédents figurait l'espace hilbertien $L_T(G)$ muni d'une mesure spectrale finie $G(d\lambda)$, ce qui nous a permis d'utiliser directement la représentation spectrale (7.2.2) pour des valeurs isolées du processus aléatoire initial $\xi(t)$, $t \in T$, coïncidant sur les fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$ avec les valeurs de la fonctionnelle aléatoire

$$\eta(\varphi) = \langle \varphi, \eta \rangle_G, \quad \varphi \in L_T(G),$$

dont la valeur moyenne par rapport à la distribution $\mathbf{P}_\theta$ est $\psi_\theta(\lambda) \in \in L_T(G)$, où ψ_θ donne dans l'espace hilbertien $L_T(G)$ la fonctionnelle linéaire coïncidant sur les fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$ avec les valeurs $\theta(t)$, $t \in T$ (voir (7.2.3), (7.2.4)). Dès le début, au lieu du processus aléatoire $\xi(t)$ du paramètre continu $t \in T$ on aurait pu étudier le processus aléatoire généralisé $\eta(\varphi)$ de $\varphi \in L_T(G)$ de valeur moyenne ψ_θ:

$$\langle \varphi, \psi_\theta \rangle_G = \mathbf{M}_\theta \langle \varphi, \eta \rangle_G, \quad \varphi \in L_T(G),$$

et de fonctionnelle de corrélation $B = A^*A$, où l'opérateur A de $L_T(G)$ dans $L_T(F)$ agit conformément à la formule $A\varphi = \varphi$. Il y a lieu de noter ici (voir § 6, chapitre I) que l'espace $L_T(G)$ peut être défini comme la fermeture de l'espace de toutes les fonctions du type

$$\varphi(\lambda) = \int_T e^{i\lambda t} c(t)\, dt,$$

où $c(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable, s'annulant à l'extérieur de l'intervalle T.

Lorsque l'on considère une fonctionnelle aléatoire du type (7.2.2) ou, ce qui est la même chose, un élément aléatoire η dans l'espace hilbertien $L_T(G)$, on doit envisager les estimations de la valeur moyenne $\psi_\theta \in L_T(G)$. Toutes les méthodes et les résultats exposés ci-dessus sont également applicables ici ; il suffit de passer de l'ensemble paramétrique T à l'ensemble paramétrique $L_T(G)$ et des valeurs $\xi(t)$ et $\theta(t)$, $t \in T$, aux valeurs $\langle \varphi, \eta \rangle_G$ et $\langle \varphi, \psi_\theta \rangle_\theta$, $\varphi \in \in L_T(G)$.

Un cas particulier en est $G(d\lambda) = \frac{1}{2\pi} d\lambda$. $L_T(G)$ coïncide ici avec l'espace des fonctions

$$\varphi(\lambda) = \int_T e^{i\lambda t} c(t)\, dt,$$

où $c(t)$ appartient à $\mathscr{L}^2(T)$, espace de toutes les fonctions de carré intégrable, de plus, d'après l'égalité de Parseval

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G = \langle c_1(t), c_2(t) \rangle = \int c_1(t) c_2(t)\, dt.$$

Il est clair que l'on peut envisager la fonction aléatoire $\eta(\lambda) \in L_T(G)$ de la forme

$$\eta(\lambda) = \int_T e^{i\lambda t} \xi(t)\, dt,$$

ou directement le processus aléatoire initial $\xi(t)$, $t \in T$, en tant que fonction de l'espace hilbertien $\mathscr{L}^2(T)$, ce qui en fait est la même chose (notons que $\psi_\theta(\lambda) = \int_T e^{i\lambda t}\, \theta(t)\, dt$).

§ 3. Estimations pseudo-meilleures et leur consistance

Supposons que le processus aléatoire « observé » $\xi(t)$, $t \in T$, soit un élément de l'espace hilbertien X défini précédemment des fonctions réelles $x = x(t)$ de $t \in T$ de la forme (7.2.5). Soit $\tilde{\theta} \in X$ l'estimation des moindres carrés de la valeur moyenne inconnue $\theta \in \Theta$, $\Theta \subseteq X$, donnée par la formule (7.2.8).

Dans l'expression (7.2.8) figurent les estimations

$$\tilde{\alpha}_k = \langle \theta_k, \xi \rangle = \langle \theta_k, \tilde{\theta} \rangle$$

des coefficients $\alpha_k = \langle \theta, \theta_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, dans le développement de l'élément $\theta \in \Theta$ suivant une base orthonormée $\theta_1, \theta_2, \ldots \in \tilde{\Theta}$. Nous appellerons ces estimations, ainsi que les estimations du type

$$\tilde{\alpha} = \langle \theta_\alpha, \tilde{\theta} \rangle = \langle \theta_\alpha, \xi \rangle$$

des fonctionnelles

$$\alpha(\theta) = \langle \theta_\alpha, \theta \rangle \text{ de } \theta \in \Theta \tag{7.3.1}$$

dans l'espace hilbertien X (où $\theta_\alpha \in \tilde{\Theta}$), *estimations des moindres carrés.*

Les estimations des moindres carrés admettent la représentation spectrale suivante:

$$\tilde{\alpha} = \int \varphi_\alpha(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{7.3.2}$$

où $\varphi_\alpha(\lambda) \in L_T(G)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\theta_\alpha(t) = \int e^{-i\lambda t} \varphi_\alpha(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T. \tag{7.3.3}$$

En effet, en vertu des résultats du § 6 du chapitre I on a

$$\tilde{\alpha} = \langle \theta_\alpha, \tilde{\theta} \rangle = \langle \theta_\alpha, \xi \rangle = \langle \varphi_\alpha, \eta \rangle = \int \varphi_\alpha(\lambda)\, \Phi(d\lambda),$$

où $\eta(\lambda) \in L_T(G)$ est une fonction aléatoire de la représentation spectrale (7.2.2).

Notons que dans le cas $G(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\, d\lambda$ on a affaire aux estimations classiques des moindres carrés, lorsque le processus aléatoire « observé » $\xi = \xi(t)$, $t \in T$, est considéré comme un point de l'espace classique hilbertien $\mathscr{L}^2(T)$ des fonctions réelles $x = x(t)$ de $t \in T$ de produit scalaire

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle \psi_1, \psi_2\rangle_G = \begin{cases} \sum\limits_t x_1(t)\, x_2(t) & \text{pour } t \text{ discret,} \\ \int\limits_T x_1(t)\, x_2(t)\, dt & \text{pour } t \text{ continu,} \end{cases}$$

où $\psi_1, \psi_2 \in L_T(G)$ sont liées à $x_1, x_2 \in \mathscr{L}^2(T)$ par une transformation de Fourier habituelle

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_t e^{i\lambda t} x(t) & \text{pour } t \text{ discret,} \\ \int\limits_T e^{i\lambda t} x(t)\, dt & \text{pour } t \text{ continu.} \end{cases}$$

Les estimations du type (7.3.3) des fonctionnelles $\alpha(\theta) = \langle \theta_\alpha, \theta\rangle$ de $\theta \in \Theta \subseteq \mathscr{L}^2 T$ sont

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \sum\limits_t \theta_\alpha(t)\, \xi(t) & \text{pour } t \text{ discret,} \\ \int\limits_T \theta_\alpha(t)\, \xi(t)\, dt & \text{pour } t \text{ continu.} \end{cases} \tag{7.3.4}$$

Par sa structure, la formule (7.3.2) coïncide avec la formule (7.1.31) (voir théorème 1) de sorte que si $G(d\lambda)$ était la mesure spectrale du processus stationnaire $\xi(t)$, $t \in T$, les estimations $\tilde{\alpha}$ du type (7.3.2) seraient les meilleures estimations non biaisées des fonctionnelles du type (7.3.1).

Ce paragraphe est consacré à une nouvelle classe d'estimations, généralisant les estimations des moindres carrés et contenant comme cas limite les meilleures estimations non biaisées.

Les formules (7.3.2), (7.3.3) sont vraies non seulement lorsque les trajectoires du processus « observé » $\xi = \xi(t)$, $t \in T$, font partie de l'espace hilbertien correspondant X, mais également lorsque seules les conditions

$$L_T(G) \subseteq L_T(F), \quad \| \varphi \|_F \leqslant \| \varphi \|_G, \quad \varphi \in L_T(G) \tag{7.3.5}$$

(mentionnées au début du § 2) sont vérifiées. Si $G(d\lambda)$ était la mesure spectrale du processus stationnaire $\xi = \xi(t)$, les formules (7.3.2), (7.3.3) donneraient les meilleures estimations non biaisées pour des fonctionnelles du type (7.3.1). La mesure $G(d\lambda)$ permettant de construire les estimations (7.3.2) sera appelée *mesure pseudo-spectrale* et les estimations (7.3.2), *estimations pseudo-meilleures* (pour des fonctionnelles du type (7.3.1)).

On a la formule suivante :

$$\mathbf{M}_\theta \int \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \langle \varphi, \psi_\theta \rangle_G, \quad \varphi \in L_T(G), \qquad (7.3.6)$$

où $\psi_\theta(\lambda) \in L_T(G)$ est une fonction dans la représentation spectrale (7.2.1) de $\theta \in \Theta$.

Dans le cas où le processus aléatoire $\xi = \xi(t)$, $t \in T$, est un élément aléatoire de l'espace hilbertien X (construit pour la mesure pseudo-spectrale $G(d\lambda)$), cette formule a été déjà établie (voir (7.2.3)). Dans le cas d'une mesure finie quelconque $G(d\lambda)$, pour $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$ la formule (7.3.6) coïncide avec (7.2.1) et s'étend à une enveloppe linéaire fermée des fonctions $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t}$, $t \in T$, c'est-à-dire à tout l'espace hilbertien $L_T(G)$ (comparer avec (7.1.22)).

En vertu de (7.3.6)

$$\mathbf{M}_\theta \tilde{\alpha} = \mathbf{M}_\theta \int \varphi_\alpha(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = \langle \varphi_\alpha, \psi_\theta \rangle_G = \langle \theta_\alpha, \theta \rangle = \alpha(\theta), \quad \theta \in \Theta, \qquad (7.3.7)$$

ce qui veut dire que *les estimations pseudo-meilleures sont non biaisées.*

La propriété importante des estimations pseudo-meilleures est *leur invariance dans la multiplication de la mesure pseudo-spectrale $G(d\lambda)$ par un facteur constant quelconque k.*

En effet, la fonction $\varphi_\alpha(\lambda)$ de la formule (7.3.2) est déterminée d'une manière univoque par la relation

$$\alpha(\theta) = \langle \varphi_\alpha, \psi_\theta \rangle_G, \quad \theta \in \Theta, \qquad (7.3.8)$$

où les fonctions $\psi_\theta(\lambda) \in L_T(G)$ et $\theta(t) \in \Theta$ sont liées par la formule (7.2.1). De toute évidence on a

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t} [k^{-1}\psi_\theta(\lambda)]\, kG(d\lambda)$$

et

$$\langle \varphi_\alpha, k^{-1}\psi_\theta \rangle_{kG} = \langle \varphi_\alpha, \psi_\theta \rangle_G = \alpha(\theta),$$

de sorte que par rapport à la mesure pseudo-spectrale $kG(d\lambda)$ la fonction $\varphi_\alpha(\lambda)$ dans la formule (7.3.2) est la même que par rapport à la mesure initiale $G(d\lambda)$.

Considérons le processus observé $\xi = \xi(t)$ sur les ensembles $T = T_1, T_2, \ldots$ tels que

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$$

Nous parlerons des estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_n$ du type (7.3.2) construites d'après les observations du processus aléatoire $\xi = \xi(t)$ sur l'ensemble correspondant $T = T_n$.

Soit $\alpha(\theta)$ une fonctionnelle linéaire de la valeur moyenne inconnue $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, avec

$$T^* = \bigcup T_n,$$

continue pour un certain $n = n_0$ par rapport au produit scalaire

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_n = \langle \psi^n_{\theta_1}, \psi^n_{\theta_2} \rangle_G \tag{7.3.9}$$

du même type que (7.2.6), c'est-à-dire que les fonctions $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, de l'espace paramétrique Θ et les fonctions $\psi^n_\theta(\lambda) \in L_{T_n}(G)$ sont liées par une relation du type (7.2.1):

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t} \psi^n_\theta(\lambda) G(d\lambda), \quad t \in T_n. \tag{7.3.10}$$

L e m m e 5. *Les produits scalaires mentionnés sont tels que*

$$\|\theta\|_1 \leqslant \|\theta\|_2 \leqslant \ldots \tag{7.3.11}$$

D é m o n s t r a t i o n. En effet, si la représentation (7.3.10) est vraie pour un certain T_n, en prenant la projection ψ^m_θ de l'élément $\psi^n_\theta \in L_{T_n}(G)$ sur le sous-espace $L_{T_m}(G) \subseteq L_{T_n}(G)$, $m \leqslant n$, on obtient

$$\theta(t) = \langle e^{i\lambda t}, \psi^n_\theta \rangle_G = \langle e^{i\lambda t}, \psi^m_\theta \rangle_G, \quad t \in T_m,$$

c'est-à-dire qu'on a également la représentation (7.3.10) pour tout $T_m \subseteq T_n$, l'élément correspondant ψ^m_θ étant la projection sur $L_{T_m}(G)$ de l'élément initial $\psi^{n\prime}_\theta \in L_{T_n}(G)$. On en déduit

$$\|\theta\|_m = \|\psi^m_\theta\|_G \leqslant \|\psi^n_\theta\|_G = \|\theta\|_n$$

pour $m \leqslant n$ quelconque, ce qu'il fallait démontrer.

Les inégalités (7.3.11) permettent de croire que si la fonctionnelle linéaire $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$ pour un certain $n = n_0$ est continue par rapport au produit scalaire (7.3.9), elle sera douée de cette même propriété pour tout $n \geqslant n_0$, de telle sorte que pour tout $n \geqslant n_0$ on a une représentation du type (7.3.1), (7.3.8):

$$\alpha(\theta) = \langle \varphi^n_\alpha, \psi^n_\theta \rangle_G, \quad \theta \in \Theta, \tag{7.3.12}$$

à laquelle correspond l'estimation pseudo-meilleure non biaisée du type (7.3.2)

$$\tilde{\alpha}_n = \int \varphi^n_\alpha(\lambda) \Phi(d\lambda). \tag{7.3.13}$$

Nous dirons que les estimations $\tilde{\alpha}_n$, $n \geqslant n_0$, sont *consistantes* si

$$\mathbf{M}_\theta [\tilde{\alpha}_n - \alpha(\theta)]^2 = \|\varphi^n_\alpha\|_F^2 \to 0 \tag{7.3.14}$$

pour $n \to \infty$.

Supposons pour le moment que $G(d\lambda)$ soit la vraie mesure spectrale et que $\tilde{\alpha}_n$ soient les meilleures estimations non biaisées construites d'après les observations de $\xi(t)$, $t \in T_n$.

Rappelons (voir théorème 1) que dans ce cas la meilleure estimation $\tilde{\alpha}$, construite d'après les observations $\xi(t)$, $t \in T$, est l'unique estimation non biaisée dans l'espace $L \subseteq H(T)$ engendré par toutes les grandeurs η_θ, $\theta \in \Theta$, du type (7.1.25). Pour l'espace hilbertien

correspondant $L_T(G)$ ($G(d\lambda)$ étant la mesure spectrale) ceci signifie que parmi toutes les fonctions $\varphi(\lambda) \in L_T(G)$ donnant les estimations non biaisées $\int \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$ de la fonctionnelle étudiée $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$, seule la fonction $\varphi_\alpha(\lambda)$ déterminant la meilleure estimation appartient au sous-espace $L \subseteq L_T(G)$ engendré par tous les éléments possibles $\psi_\theta(\lambda) \in L_T(G)$ de (7.2.1); de plus $\varphi_\alpha(\lambda)$ coïncide avec la projection sur l'espace mentionné $L \subseteq L_T(G)$ de la « caractéristique spectrale » $\varphi(\lambda)$ de toute autre estimation non biaisée $\int \varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)$.

De même, $\varphi_\alpha^n(\lambda)$ coïncide avec la projection sur $L_n \subseteq L_{T_n}(G)$ de toute fonction $\varphi_\alpha^m(\lambda)$ (pour $m \leqslant n$), L_n étant le sous-espace engendré par toutes les fonctions $\psi_\theta^n(\lambda) \in L_{T_n}(G)$, $\theta \in \Theta$. Par conséquent

$$\|\varphi_\alpha^m - \varphi_\alpha^n\|_G^2 = \|\varphi_\alpha^m\|_G^2 - \|\varphi_\alpha^n\|_G^2 \to 0$$

pour $m, n \to \infty$ et il existe la limite

$$\varphi_\alpha^*(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha^n(\lambda) \tag{7.3.15}$$

(dans l'espace $L_{T^*}(G)$). En passant à l'espace $L_{T^*}(F)$ sous la condition (7.3.5) pour $T = T^*$, on voit qu'il existe un élément $\varphi_\alpha^*(\lambda) \in L_T(F)$ tel que

$$\|\varphi_\alpha^n - \varphi_\alpha^*\|_F \to 0. \tag{7.3.16}$$

On en conclut (voir (7.3.14)) que la condition nécessaire et suffisante de consistance d'une estimation est donc

$$\varphi_\alpha^*(\lambda) = 0 \tag{7.3.17}$$

presque partout par rapport à $F(d\lambda)$.

Ainsi, sous l'hypothèse supplémentaire de l'équivalence de la mesure $G(d\lambda)$ et de la vraie mesure spectrale $F(d\lambda)$, avec de plus

$$L_{T^*}(G) \subseteq L_{T^*}(F), \tag{7.3.18}$$
$$\|\varphi\|_F \leqslant \|\varphi\|_G, \quad \varphi \in L_{T^*}(G)$$

(comparer avec (7.3.5)), pour que les estimations $\tilde{\alpha}_n$ soient consistantes il faut et il suffit que la fonction limite $\varphi_\alpha^*(\lambda)$ dans (7.3.15) soit égale à 0 presque partout par rapport à $G(d\lambda)$; il est évident que ceci équivaut également à la condition

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_\alpha^n\|_G = 0. \tag{7.3.19}$$

Définissons $\tilde{\Theta}_n$ comme l'espace de toutes les fonctions réelles $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, qui est la fermeture de l'espace paramétrique Θ par rapport à la norme $\|\theta\| = \|\psi_\theta^n\|_G$, et posons

$$\tilde{\Theta} = \bigcap \tilde{\Theta}_n.$$

Considérons la fonction

$$\theta^*(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi_\alpha^*(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T^*, \tag{7.3.20}$$

liée par une formule du type (7.3.10) à la fonction limite $\varphi_\alpha^*(\lambda)$. Il est facile de voir que $\theta^* \in \tilde{\Theta}$, car $\theta^*(t)$ est la limite (dans chaque espace fixé $\tilde{\Theta}_m$) d'une suite des fonctions

$$\theta^n(t) = \int e^{-i\lambda t}\varphi_\alpha^n(\lambda)\, G(d\lambda), \quad n \geqslant m.$$

Toute fonctionnelle linéaire $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$ du type étudié (c'est-à-dire continue pour une certaine norme $\|\theta\|_m = \|\psi_\theta^m\|_G$) par suite de la continuité s'étend à la fermeture $\tilde{\Theta}_m$ et d'autant plus à l'espace $\tilde{\Theta}$. En particulier, à partir de la formule (7.3.12) par continuité on obtient également la valeur

$$\alpha(\theta^*) = \lim_{n\to\infty} \alpha(\theta^n) = \lim_{n\to\infty} \langle\varphi_\alpha^n, \varphi_\alpha^n\rangle_G = \|\varphi_\alpha^*\|_G^2.$$

Ainsi, pour la consistance des estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_n$ il faut et il suffit que

$$\alpha(\theta^*) = 0. \tag{7.3.21}$$

Sans restreindre la généralité on peut considérer que $\Theta = \tilde{\Theta}$, car la classe des estimations pseudo-meilleures non biaisées pour l'ensemble paramétrique initial Θ coïncide avec la classe de telles estimations pour son enveloppe linéaire fermée $\tilde{\Theta}$ (dans le sens mentionné ci-dessus) (à ce sujet voir la remarque à la page 269). Supposons alors que

$$\tilde{\Theta} = \Theta.$$

Désignons par Θ^* le sous-espace dans Θ formé par toutes les fonctions $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, admettant la représentation spectrale du type (7.3.10):

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t}\psi_\theta(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T^*. \tag{7.3.22}$$

Pour les éléments $\theta \in \Theta^*$, à partir des formules (7.3.10), (7.3.12), vraies pour $n \geqslant n_0$ quelconque, on obtient

$$\alpha(\theta) = \langle\varphi_\alpha^n, \psi_\theta\rangle_G = \langle\varphi_\alpha^*, \psi_\theta\rangle_G, \tag{7.3.23}$$

d'où en cas de consistance des estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_n$ il vient

$$\alpha(\theta) = 0 \quad \text{pour} \quad \theta \in \Theta^*. \tag{7.3.24}$$

Avec la condition de consistance (7.3.21) ceci conduit au résultat suivant.

Théorème 5. *Pour la consistance des estimations pseudo-meilleures* $\tilde{\alpha}_n$ *de la fonctionnelle linéaire* $\alpha(\theta)$ *de* $\theta \in \Theta$ *il faut et il suffit que la condition* (7.3.24) *soit satisfaite.*

Notons que si le sous-espace Θ^* de toutes les fonctions $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, admettant la représentation spectrale (7.3.22) ne contient qu'un élément trivial $\theta(t) \equiv 0$, pour toute fonctionnelle linéaire $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta$, la condition (7.3.24) est vérifiée et, en vertu du théorème 5, toutes les estimations pseudo-meilleures (pour toutes les fonctionnelles $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$) seront consistantes. Inversement, la consistance de toutes les estimations pseudo-meilleures signifie que (voir (7.3.24))

$$\alpha(\theta) = \langle \varphi_\alpha^n, \psi_\theta \rangle_G = 0$$

pour toutes les fonctionnelles linéaires (pour tous les éléments $\varphi_\alpha^n \in L_{T_n}(G)$, $n = 1, 2, \ldots$), par conséquent on a $\psi_\theta = 0$, c'est-à-dire que le sous-espace Θ^* est trivial.

Cherchons les *conditions spectrales* nécessaires et suffisantes pour que

$$\Theta^* = 0, \tag{7.3.25}$$

c'est-à-dire pour qu'aucune des fonctions $\theta(t) \in \Theta$ n'admette la représentation (7.3.22).

Supposons que la mesure pseudo-spectrale $G(d\lambda)$ soit absolument continue et la densité pseudo-spectrale $g(\lambda) = G(d\lambda)/d\lambda$ bornée.

Si sous ces conditions la fonction $\theta(t)$, $t \in T^*$, admet la représentation (7.3.22), pour $t \in T$ elle coïncide avec la fonction $\theta(t)$, $-\infty < t < \infty$, de carré sommable, qui est la transformée de Fourier de la fonction $\tilde{\theta}(\lambda) = \psi_\theta(\lambda)\, g(\lambda)$ de carré intégrable satisfaisant de plus à la condition

$$\int \frac{|\tilde{\theta}(\lambda)|^2}{g(\lambda)}\, d\lambda < \infty \tag{7.3.26}$$

(comparer avec la condition (3.4.6). D'un autre côté, si une fonction $\theta(t)$, $-\infty < t < \infty$, du type décrit existe, pour $t \in T^*$ elle admet la représentation (7.3.22), où $\psi_\theta(\lambda) \in L_{T^*}(G)$ est la projection de la fonction $\tilde{\theta}(\lambda)/g(\lambda)$ de $L_{(-\infty, \infty)}(G)$ sur le sous-espace $L_{T^*}(G)$.

Ainsi, dans le cas d'une densité pseudo-spectrale bornée $g(\lambda)$ nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 6. *Pour que les estimations pseudo-meilleures soient consistantes il faut et il suffit que chacune des fonctions* $\theta(t)$, $t \in T^*$, *de l'espace paramétrique fermé* Θ *soit douée de cette propriété que ou bien* $\theta(t)$, $t \in T^*$, *ne soit pas de carré sommable* *), *ou bien pour*

*) C'est-à-dire que $\sum_{-\infty}^{\infty} \theta(t)^2 = \infty$ pour t discret et $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)^2\, dt = \infty$ pour t continu.

un prolongement quelconque jusqu'à la fonction $\theta(t), -\infty < t < \infty$, *de carré sommable la transformée de Fourier de* $\widetilde{\theta}(\lambda)$ *satisfasse à la condition*

$$\int \frac{|\widetilde{\theta}(\lambda)|^2}{g(\lambda)} d\lambda = \infty. \tag{7.3.27}$$

Une conséquence simple de ce théorème est la condition nécessaire et suffisante de la consistance des estimations classiques des moindres carrés (correspondant à la densité pseudo-spectrale $g(\lambda) = 1$):

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in T^*} \theta(t)^2 = \infty \quad \text{pour } t \text{ discret}, \\ &\int_{T^*} \theta(t)^2 \, dt = \infty \quad \text{pour } t \text{ continu}. \end{aligned} \tag{7.3.28}$$

Dans le cas général le sous-espace Θ^* de toutes les fonctions du type (7.3.22) n'est pas trivial.

Théorème 7. *Pour l'ensemble paramétrique* Θ^*, *les estimations pseudo-meilleures* $\widetilde{\alpha}_n$ *convergent pour* $n \to \infty$ *vers l'estimation pseudo-meilleure* $\widetilde{\alpha}$ *(de la même fonctionnelle* $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta^*$*) construite d'après les observations de* $\xi(t)$, $t \in T^*$.

Démonstration. La relation (7.3.23) montre que

$$\alpha(\theta) = \langle \varphi_\alpha^*, \psi_\theta \rangle_G, \quad \theta \in \Theta^*, \tag{7.3.29}$$

et, compte tenu de la relation limite

$$\widetilde{\alpha}_n = \int \varphi_\alpha^n \Phi(d\lambda) \to \int \varphi_\alpha^* \Phi(d\lambda),$$

ceci démontre le théorème, car en vertu de la formule générale (7.3.2) l'estimation pseudo-meilleure pour une fonctionnelle du type (7.3.29) est

$$\alpha^* = \int \varphi_\alpha^*(\lambda) \, \Phi(d\lambda).$$

§ 4. Estimations des coefficients de régression

1. Remarques générales. Nous nous arrêtons sur le cas où l'espace paramétrique Θ est de dimension finie et le problème de l'estimation des fonctionnelles linéaires $\alpha(\theta)$ de $\theta \in \Theta$ du type (7.3.1) envisagé revient à celui de l'estimation des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ dans le développement des fonctions $\theta(t)$ de Θ suivant une base $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$:

$$\theta(t) = \alpha_1\theta_1(t) + \ldots + \alpha_N\theta_N(t), \quad t \in T^*. \tag{7.4.1}$$

Considérons le sous-espace Θ^* de toutes les fonctions $\theta = \theta(t)$, $t \in T^*$, de Θ admettant la représentation spectrale (7.3.22). Choi-

sissons dans $\Theta^* \subseteq \Theta$ une base $\theta_1, \ldots, \theta_{N^*}$ que l'on complète jusqu'à la base $\theta_1, \ldots, \theta_N$ dans tout l'espace Θ.

Soit $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ la suite des ensembles $(\bigcup_n T_n = T^*)$ sur chacun desquels toutes les fonctions $\theta_k(t)$, $k = 1, \ldots, N$, admettent la représentation spectrale (7.3.10):

$$\theta_k(t) = \int e^{-i\lambda t}\psi_k^n(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T_n. \tag{7.4.2}$$

Soient $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ les estimations pseudo-meilleures des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$:

$$\tilde{\alpha}_k^n = \int \varphi_k^n(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \quad k = 1, \ldots, N; \tag{7.4.3}$$

dans cette formule $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_N^n$ est un système d'éléments conjugué de $\psi_1^n, \ldots, \psi_N^n$ (voir formule (7.1.40)), à savoir

$$\varphi_k^n(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} s_{kj}^n \psi_j^n(\lambda), \tag{7.4.4}$$

où la matrice $\{s_{kj}^n\}$ est l'inverse de la matrice dont les éléments sont

$$\langle \psi_k^n, \psi_j^n \rangle_G = \int \psi_k^n(\lambda)\, \overline{\psi_j^n(\lambda)}\, G(d\lambda),$$
$$k, j = 1, \ldots, N,$$

de plus

$$s_{kj}^n = \langle \varphi_k^n, \varphi_j^n \rangle_G \quad k, j = 1, \ldots, N.$$

Les formules (7.4.2) et (7.4.4) permettent d'écrire

$$\int e^{-i\lambda t}\varphi_k^n(\lambda)\, G(d\lambda) = \sum_{j=1}^{N} s_{kj}^n \int e^{-j\lambda t}\psi_j^n(\lambda)\, G(d\lambda) = \sum_{j=1}^{N} s_{kj}^n \theta_j(t), \quad t \in T_n.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{N} s_{kj}^* \theta_j(t) = \int e^{-j\lambda t}\varphi_k^*(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T^*,$$

où

$$\varphi_k^*(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_k^n(\lambda) \in L_{T^*}(G)$$

et

$$s_{kj}^* = \lim_{n\to\infty} s_{kj}^n = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_k^n, \varphi_j^n \rangle_G$$

(voir la relation limite (7.3.15)). On voit que les combinaisons linéaires $\sum_{j=1}^{N} s_{kj}^* \theta_j(t)$ des éléments de base $\theta_1, \ldots, \theta_N$ font partie du sous-

espace Θ^* d'éléments de base $\theta_1, \ldots, \theta_{N^*}$, ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\sum_{j=N^*+1}^{N} s_{kj}^* \theta_j(t) = 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Mais comme $\theta_{N^*+1}, \ldots, \theta_N$ sont linéairement indépendants, les égalités obtenues ne sont vraies que si

$$s_{kk}^* = \| \varphi_k^*(\lambda) \|_G^2 = 0, \quad k = N^* + 1, \ldots, N.$$

Ces égalités signifient que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\alpha}_k^n = \alpha_k, \quad k = N^* + 1, \ldots, N, \tag{7.4.5}$$

c'est-à-dire que

la méthode des estimations pseudo-meilleures donne une estimation correcte des coefficients α_k, $k = N^* + 1, \ldots N$. *Pour les autres coefficients* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N^*}$ *les estimations pseudo-meilleures* $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{N^*}$ *qu'on construit d'après les observations de* $\xi(t)$, $t \in T^*$, *sont données par les formules mentionnées ci-dessus, à savoir*:

$$\tilde{\alpha}_k = \int \varphi_k(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \quad k = 1, \ldots, N^*,$$

avec

$$\varphi_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{N^*} s_{kj} \psi_j(\lambda),$$

où les fonctions $\psi_k(\lambda)$ *se déterminent des équations*

$$\theta_k(t) = \int e^{-i\lambda t} \psi_k(\lambda)\, G(d\lambda), \quad t \in T^*, \qquad k = 1, \ldots, N^*, \tag{7.4.6}$$

et

$$\{s_{kj}\} = \{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_G\} = \{\langle \psi_k, \psi_j \rangle_G\}^{-1}. \tag{7.4.7}$$

Supposons que toutes les estimations $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ soient consistantes. En se basant sur les résultats du § 3, il est facile de trouver que pour cela *il faut et il suffit que pour* $c_1, \ldots, c_N$ *réels quelconques on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k^n(\lambda) \Big\|_G = \infty.$$

Considérons une mesure (complexe) $H_{kj}^n(d\lambda)$ donnée par la formule

$$H_{kj}^n(d\lambda) = \frac{\psi_k^n(\lambda)\, \overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\| \psi_k^n \|_G \| \psi_j^n \|_G} G(d\lambda) \tag{7.4.8}$$

qui pour $n\to\infty$ converge faiblement vers une certaine mesure $H_{kj}(d\lambda)$, c'est-à-dire que pour une fonction quelconque continue et bornée $\varphi(\lambda)$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi(\lambda)\,H_{kj}^n\,d\lambda=\int\varphi(\lambda)\,H_{kj}(d\lambda).$$

Nous allons supposer que la convergence faible de H_{kj}^n vers H_{kj} a lieu pour tous les $k,\ j=1,\ \ldots,\ N$, en d'autres termes, *on a une convergence faible des mesures matricielles* $H^n\Rightarrow H$:

$$H^n=\{H_{kj}^n\},\quad H=\{H_{kj}\}.$$

Nous dirons que la fonction $\varphi(\lambda)$ est *H-admissible*, si sous la condition de convergence faible $H^n\Rightarrow H$ on a la relation

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi(\lambda)\,H^n(d\lambda)=\int\varphi(\lambda)\,H(d\lambda).\tag{7.4.9}$$

Les fonctions admissibles forment une classe linéaire, fermée par rapport à la convergence uniforme et contenant non seulement des fonctions bornées continues, mais également des fonctions continues par morceaux avec un nombre fini de discontinuités aux points λ de mesure nulle $H(\lambda)=0$ (et évidemment une enveloppe linéaire fermée de ces fonctions).

En introduisant la matrice diagonale

$$D_n=\begin{pmatrix}\|\psi_1^n\|_G & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \|\psi_N^n\|_G\end{pmatrix},\tag{7.4.10}$$

on obtient pour la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ des estimations $\tilde{\alpha}_1^n,\ldots,\tilde{\alpha}_N^n$ l'expression suivante tirée des formules (7.4.3), (7.4.4):

$$\{\sigma_{kj}^n\}=\left\{\int\varphi_k^n(\lambda)\,\overline{\varphi_j^n(\lambda)}\,F(d\lambda)\right\}=\{s_{kj}^n\}\left\{\int\psi_k^n(\lambda)\,\overline{\psi_j^n(\lambda)}\,F(d\lambda)\right\}\{s_{kj}^n\}=$$

$$=\{s_{kj}^n\}\,D_n\left\{\int h(\lambda)\,\frac{\psi_k^n(\lambda)\,\overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\psi_k^n\|_G\,\|\psi_j^n\|_G}\,G(d\lambda)\right\}D_n\,\{s_{kj}^n\}=$$

$$=\{s_{kj}^n\}\,D_n\left\{\int h(\lambda)\,H_{kj}^n(d\lambda)\right\}D_n\,\{s_{kj}^n\},$$

où

$$h(\lambda)=\frac{F(d\lambda)}{G(d\lambda)},$$

et $\{s_{kj}^n\}$ et D_n sont des matrices données par les formules (7.4.7) et (7.4.10).

Supposons que la densité $h(\lambda)=F(d\lambda)/G(d\lambda)$ soit admissible. En vertu de la condition de convergence faible (7.4.9) on a

$$\lim_{n\to\infty}\int h(\lambda)\,H_{kj}^{(n)}(d\lambda)=\int h(\lambda)\,H_{kj}(d\lambda),\quad k,\ j=1,\ \ldots,\ N,$$

de plus

$$D_n \{s_{kj}^n\} D_n = \left\{ \int \frac{\psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\psi_k^n\| \cdot \|\psi_j^n\|} G(d\lambda) \right\}^{-1} = \left\{ \int H_{kj}^n(d\lambda) \right\}^{-1}.$$

Par conséquent, sous la condition supplémentaire que la matrice

$$H = \left\{ \int H_{kj}(d\lambda) \right\}$$

soit régulière, ce que nous appellerons dans la suite la *régularité de la mesure* $H(d\lambda)$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} D_n \{s_{kj}^n\} D_n = H^{-1}.$$

Finalement il vient

$$\lim D_n \{\sigma_{kj}^n\} D_n = H^{-1} \left[\int h(\lambda) H(d\lambda) \right] H^{-1}. \tag{7.4.11}$$

Ainsi

sous la condition que les mesures matricielles $H^n(d\lambda)$ *de composantes du type* (7.4.8) *soient faiblement convergentes vers une certaine mesure* $H(d\lambda)$, *que de plus la matrice* $H = \int H(d\lambda)$ *soit régulière et la densité* $h(\lambda) = F(d\lambda)/G(d\lambda)$ *admissible, la matrice de corrélation* $\{\sigma_{kj}^n\}$ *des estimations pseudo-meilleures satisfait à la relation*

$$\{\sigma_{kj}^n\} \sim D_n^{-1} [H^{-1} \int h(\lambda) H(d\lambda) H^{-1}] D_n^{-1}$$

(*où la matrice diagonale* D_n *est donnée par la formule* (7.4.10)) *et en particulier*

$$\sigma_{kk}^n = \mathrm{M}_\theta [\tilde{\alpha}_k^n - \alpha_k]^2 = O\{\|\psi_k^n\|_G^{-2}\}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

2. Efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures (cas discret). Ci-dessous nous trouverons les formules asymptotiques explicites du type (7.4.11) pour la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ des estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$, construites d'après les observations du processus aléatoire $\xi(t)$ sur l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant n$ (le temps t est discret). On supposera, en général, qu'il existe une densité spectrale continue $f(\lambda)$ satisfaisant à la condition

$$c_1 \leqslant f(\lambda) \leqslant c_2 \tag{7.4.12}$$

(pour c_1 et c_2 positifs), que les fonctions $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$ sont telles que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \theta_k(t)^2 = \infty,$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant n} |\theta_k(t)| = o\left\{ \sqrt{\sum_0^n \theta_k(t)^2} \right\}, \tag{7.4.13}$$
$$k = 1, \ldots, N,$$

et pour tous les $k, j = 1, \ldots, N$, pour chaque valeur de s, existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_0^n \theta_k(t+s)\,\theta_j(t)}{\sqrt{\sum_0^n \theta_k(t)^2}\sqrt{\sum_0^n \theta_j(t)^2}} = R_{kj}(s). \tag{7.4.14}$$

Il est facile de voir que la fonction matricielle

$$R(t) = \{R_{kj}(t)\}, \quad -\infty < t < \infty,$$

est définie positive en ce sens que, pour tout instant $t_1, t_2, \ldots$ et $c_1, c_2, \ldots$ réels quelconques, on a

$$\sum_{p,q} c_p c_q R_{k_p k_q}(t_p - t_q) \geqslant 0.$$

On sait *) qu'une telle fonction matricielle admet la représentation spectrale de la forme

$$R(t) = \int e^{i\lambda t}\, H^0(d\lambda), \tag{7.4.15}$$

où $H^0(d\lambda) = \{H^0_{kj}(d\lambda)\}$ est une mesure matricielle définie positive, c'est-à-dire que les composantes $H^0_{kj}(d\lambda)$ sont des mesures complexes (à variation bornée) et la matrice $H^0(\Delta) = \{H^0_{kj}(\Delta)\}$ est définie positive pour tout ensemble mesurable Δ.

Nous dirons que $H^0(d\lambda)$ est *la mesure spectrale* **) de la fonction vectorielle $\{\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_N(t)\}$. Nous allons supposer que $H^0(d\lambda)$ est régulière (c'est-à-dire que la matrice $H_0 = \int H^0(d\lambda)$ est régulière).

En vertu de la condition (7.4.13) pour $n \to \infty$ on a

$$\frac{\sum_0^n \theta_k(t+s)\,\theta_j(t)}{\sqrt{\sum_0^n \theta_k(t)^2}\sqrt{\sum_0^n \theta_j(t)^2}} \sim \frac{\sum_0^{n-s} \theta_k(t+s)\,\theta_j(t)}{\sqrt{\sum_0^n \theta_k(t)^2}\sqrt{\sum_0^n \theta_j(t)}} =$$

$$= \int e^{i\lambda s} \frac{\widetilde{\theta}^n_k(\lambda)\,\overline{\widetilde{\theta}^n_j(\lambda)}}{\|\widetilde{\theta}^n_k\|_{G^0}\,\|\widetilde{\theta}^n_j\|_{G^0}}\, G^0(d\lambda) = \int e^{i\lambda s} H^{0,\,n}_{kj}(d\lambda),$$

---

*) Voir, par exemple, [22], page 30.

**) Cette notion a été fructueusement utilisée par U. Grenander et M. Rosenblatt dans l'étude de l'efficacité asymptotique des estimations des moindres carrés, voir, par exemple, [28], ainsi que le théorème 10.

où

$$\widetilde{\theta}_k^n(\lambda)=\sum_0^n e^{i\lambda t}\theta_k(t),\quad k=1,\ \ldots,\ N,$$

$$G^0(d\lambda)=\frac{1}{2\pi}\,d\lambda$$

et

$$H_{kj}^{0,n}(d\lambda)=\frac{\widetilde{\theta}_k^n(\lambda)\,\overline{\widetilde{\theta}_j^n(\lambda)}}{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}\,\|\widetilde{\theta}_j^n\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda),\quad k,\ j=1,\ \ldots,N.$$

Par conséquent, pour chaque valeur de t

$$R_{kj}(t)=\int e^{i\lambda t}H_{kj}^0(d\lambda)=\lim_{n\to\infty}\int e^{i\lambda t}H_{kj}^{0,n}(d\lambda),$$

ce qui équivaut à la convergence faible de la suite des mesures $H_{kj}^{0,n}(d\lambda)$, pour $n\to\infty$, vers la mesure $H_{kj}^0(d\lambda)$:

$$H_{kj}^{0,n}\Rightarrow H_{kj}^0\quad(k,\ j=1,\ \ldots,\ N).$$

Ainsi, la mesure spectrale $H^0(d\lambda)$ des fonctions $\{\theta_1(t),\ \ldots,\ \theta_N(t)\}$ déterminée à partir de la formule (7.4.15) coïncide avec la mesure matricielle dans la formule (7.4.11), correspondant à la mesure pseudo-spectrale $G^0(d\lambda)=\frac{1}{2\pi}d\lambda$.

Finalement on obtient une formule asymptotique du type (7.4.11) pour la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ des estimations des moindres carrés, estimations pseudo-meilleures correspondant à la mesure pseudo-spectrale $G^0(d\lambda)=\frac{1}{2\pi}d\lambda$, à savoir

pour une densité spectrale H^0-admissible on a

$$\lim_{n\to\infty}D_n^0\{\sigma_{kj}^n\}D_n^0=2\pi R(0)^{-1}\int f(\lambda)H^0(d\lambda)R(0)^{-1},\qquad(7.4.16)$$

où $R(0)=\int H^0(d\lambda)$ et D_n^0 est une matrice diagonale du type

$$D_n^0=\begin{Vmatrix}\sqrt{\sum_0^n\theta_1(t)^2} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\sum_0^n\theta_N(t)^2}\end{Vmatrix}.\qquad(7.4.17)$$

Considérons maintenant les estimations pseudo-meilleures $\widetilde{\alpha}_1^n,\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_N^n$ correspondant à la mesure pseudo-spectrale $G(d\lambda)$ de densité

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi\,|Q(e^{i\lambda})|^2},\qquad(7.4.18)$$

où $Q(z) = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k$ est un polynôme à coefficients réels n'ayant pas de zéros dans le cercle unité $|z| \leqslant 1$.

Cherchons la solution $\psi(\lambda) \in L_{[0,n]}(G)$ de l'équation

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t}\psi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi |Q(e^{i\lambda})|^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant n. \qquad (7.4.19)$$

Considérons la fonction $\theta(t)$ définie pour tous les t par l'égalité (7.4.19). Pour $0 \leqslant t \leqslant n$ elle coïncide avec la fonction initiale $\theta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant n$. Introduisant l'opérateur de déplacement Δ:

$$\Delta\theta(t) = \theta(t+1)$$

et l'opérateur

$$Q(\Delta) = \sum_{k=0}^{m} q_k \Delta^k,$$

on obtient les relations suivantes

$$Q(\Delta)\theta(t) = \int [Q(\Delta) e^{-i\lambda t}]\psi(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi |Q(e^{i\lambda})|^2} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda t} \frac{\psi(\lambda)}{Q(e^{i\lambda})} d\lambda = 0$$

pour $t < 0$ car $Q(z)$ est une fonction extérieure et $\psi(\lambda)/Q(e^{i\lambda})$ fait partie du sous-espace $L_{(0,\infty)}(G^0)$.

Dans le cas où $n \geqslant m$ l'équation obtenue

$$Q(\Delta)\theta(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k \theta(t+k) = 0, \quad t = -1, -2, \ldots,$$

permet de déterminer successivement les valeurs de la fonction étudiée $\theta(t)$ pour $t = -1, -2, \ldots$, à savoir:

$$\theta(-1) = -\frac{1}{q_0}\sum_{k=1}^{m} q_k \theta(k-1),$$

. . . .

$$\theta(-j) = -\frac{1}{q_0}\sum_{k=1}^{m} q_k \theta(k-j),$$

. . . .

D'une manière analogue on peut trouver les valeurs de $\theta(t)$ pour $t = n+1, n+2, \ldots$ à partir de l'équation

$$Q(\Delta^{-1})\theta(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k \theta(t-k) = 0; \quad t = n+1, n+2, \ldots,$$

à savoir :

$$\theta(n+1) = -\frac{1}{q_0}\sum_{k=1}^{m} q_k\,\theta(n+1-k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\theta(n+j) = -\frac{1}{q_0}\sum_{k=1}^{m} q_k\theta(n+j-k),$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots$$

Puis

$$Q(\Delta^{-1})\,Q(\Delta)\,\theta(t) = \int [Q(\Delta^{-1})\,Q(\Delta)\,e^{-i\lambda t}]\,\psi(\lambda)\frac{d\lambda}{2\pi\,|\,Q(e^{i\lambda})\,|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad -\infty < t < \infty,$$

d'où l'on voit que la solution $\psi(\lambda)$ de l'équation (7.4.19) est

$$\psi(\lambda) = \sum_{0}^{n} e^{i\lambda t} z(t), \tag{7.4.20}$$

avec

$$z(t) = Q(\Delta^{-1})\,Q(\Delta)\,\theta(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

(Notons que pour $m \leqslant t \leqslant n-m$ la fonction $z(t) = Q(\Delta^{-1})\,Q(\Delta)\,\theta(t)$ est déterminée par la fonction initiale $\theta(t)$.)

Il est alors facile de voir que

$$\sum_{t=0}^{n} e^{i\lambda t}Q(\Delta^{-1})\,Q(\Delta)\,\theta(t) = \sum_{t=0}^{n} e^{i\lambda t}\sum_{k,\,j=0}^{m} q_k q_j\theta(t-k+j) =$$

$$= \sum_{k,\,j=0}^{m} q_k q_j e^{i\lambda(k-j)}\sum_{t=0}^{n} e^{i\lambda(t-k+j)}\theta(t-k+j) =$$

$$= |\,Q(e^{i\lambda})\,|^2\sum_{0}^{n} e^{i\lambda s}\theta(s) + r(\lambda),$$

où dans la somme trigonométrique

$$r(\lambda) = \sum_{-m}^{m} a_k e^{i\lambda k} + \sum_{n-m}^{n+m} b_k e^{i\lambda k}$$

les coefficients

$$a_k = \sum_{j=0}^{m-1} c'_{kj}\theta(j),$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{m-1} c''_{kj}\theta(n-j)$$

sont des combinaisons linéaires des valeurs $\theta(j), j = 0, \ldots, m-1$, et $\theta(k)$, $k = n-1, \ldots, n-m+1$. On peut voir que

la solution $\psi(\lambda)$ *de l'équation* (7.4.19) *est de la forme*

$$\psi(\lambda) = |Q(e^{i\lambda})|^2 \widetilde{\theta}(\lambda) + r(\lambda), \tag{7.4.21}$$

où

$$\widetilde{\theta}(\lambda) = \sum_0^n e^{i\lambda t}\,\theta(t).$$

Appliquons les résultats obtenus aux fonctions $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$. D'après la formule générale (7.4.21) on a

$$\psi_k^n(\lambda) = |Q(e^{i\lambda})|^2\,\widetilde{\theta}_k^n(\lambda) + r_k^n(\lambda),$$

où sous la condition (7.4.13)

$$\|r_k^n\|_G = o\{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}\}, \quad k = 1, \ldots, N$$

(rappelons que $G^0(d\lambda) = d\lambda/2\pi$ et $G(d\lambda) = 1/2\pi|Q(e^{i\lambda})|^2$). Donc, si la mesure spectrale (matricielle) $H^0(d\lambda)$ des fonctions $\{\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)\}$ existe, pour toute fonction $\varphi(\lambda)$ bornée et continue on a

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(\lambda)\frac{\psi_k^n(\lambda)\overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}\|\widetilde{\theta}_j^n\|_{G^0}}G(d\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int \varphi(\lambda)|Q(e^{i\lambda})|^2\frac{\widetilde{\theta}_k^n(\lambda)}{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}}\frac{\overline{\widetilde{\theta}_j^n(\lambda)}}{\|\widetilde{\theta}_j^n\|_{G^0}}G^0(d\lambda) = \int \varphi(\lambda)|Q(e^{i\lambda})|^2 H_{kj}^0(d\lambda) \tag{7.4.22}$$

et en particulier

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\langle\psi_k^n, \psi_j^n\rangle_G}{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}\|\widetilde{\theta}_j^n\|_{G^0}} = \int |Q(e^{i\lambda})|^2 H_{kj}^0(d\lambda).$$

On voit que la mesure matricielle $H(d\lambda) = \{H_{kj}(d\lambda)\}$ dans la formule asymptotique (7.4.11) a pour composantes

$$H_{kj}(d\lambda) = \left[\int |Q(e^{i\lambda})|^2 H_{kk}^0(d\lambda)\right]^{-1/2}|Q(e^{i\lambda})|^2 H_{kj}^0(d\lambda)\times \left[\int |Q(e^{i\lambda})|^2 H_{jj}^0(d\lambda)\right]^{-1/2}, \tag{7.4.23}$$

et la matrice diagonale D_n est telle que (voir (7.4.10), (7.4.17)) $\lim_{n\to\infty} D_n^0 D_n^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\int |Q(e^{i\lambda})|^2 H_{11}^0(d\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\int |Q(e^{i\lambda})|^2 H_{NN}^0(d\lambda)} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Finalement on obtient le résultat suivant.

Théorème 8. *Supposons que les fonctions* $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$ *aient une mesure spectrale* $H^0(d\lambda)$ *non dégénérée et qu'elles satisfassent à la condition* (7.4.13), *et soit la densité spectrale* $f(\lambda)$ H^0*-admissible. Pour toute densité pseudo-spectrale* $g(\lambda)$ *de la forme*

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi\,|Q(e^{i\lambda})|^2} \tag{7.4.24}$$

la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ *des estimations pseudo-meilleures* $\widetilde{\alpha}_1^n, \ldots, \widetilde{\alpha}_N^n$ *satisfait à la relation asymptotique suivante* *):

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0\{\sigma_{kj}^n\}D_n^0=2\pi\left[\int\frac{1}{g(\lambda)}H^0(d\lambda)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\int h(\lambda)\frac{1}{g(\lambda)}H^0(d\lambda)\right]\left[\int\frac{1}{g(\lambda)}H^0(d\lambda)\right]^{-1}, \tag{7.4.25}$$

où

$$h(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)},$$

et D_n^0 *est une matrice diagonale* (7.4.17).

Considérons des estimations linéaires non biaisées quelconques, que nous désignerons toujours

$$\widetilde{\alpha}_k^n=\int\varphi_k^n(\lambda)\,\Phi(d\lambda),\quad k=1,\ldots,N,$$

comme les estimations pseudo-meilleures étudiées ci-dessus. Nous allons montrer que sous la condition (7.4.12) pour la matrice de corrélation

$$\{\sigma_{kj}^n\}=\left\{\int\varphi_k^n(\lambda)\overline{\varphi_j^n(\lambda)}\,f(\lambda)\,d\lambda\right\}$$

on a l'estimation asymptotique par défaut suivante

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0\{\sigma_{kj}^n\}D_n^0\geqslant 2\pi\left\{\int\frac{1}{f(\lambda)}H^0(d\lambda)\right\}^{-1}. \tag{7.4.26}$$

Pour la démonstration nous nous servirons d'une inégalité générale. Si $x_1, \ldots, x_m$ sont des éléments quelconques d'un espace hilbertien, et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments linéairement indépendants, on a

$$\{\langle x_i, x_j\rangle\}\geqslant\{\langle\widetilde{x}_i,\widetilde{x}_j\rangle\}=\{\langle\widetilde{x}_i, y_k\rangle\}\{\langle y_k, y_l\rangle\}^{-1}\{\langle\widetilde{x}_j, y_l\rangle\}^*=$$
$$=\{\langle x_i, y_k\rangle\}\{\langle y_k, y_l\rangle\}^{-1}\{\langle x_j, y_l\rangle\}^*, \tag{7.4.27}$$

---

*) Il y a lieu de mentionner que la relation (7.4.25) est vérifiée pour une densité pseudo-spectrale positive et continue quelconque $g(\lambda)$ (voir Y. A. Rozanov, M. O. Kozlov, *Estimations asymptotiquement efficaces des coefficients de régression* (en russe). Doklady Akademii Nauk SSSR **1** (1969)), mais pour les applications pratiques on peut évidemment se limiter aux densités pseudo-spectrales du type (7.4.18).

où $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, donnés par les formules ci-après, sont les projections des éléments initiaux $x_1, \ldots, x_n$ sur le sous-espace engendré par les éléments $y_1, \ldots, y_n$:

$$\tilde{x}_i = \sum_{k,\, l} c_{kl} \langle x_i,\ x_l \rangle y_k, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\{c_{kl}\} = \{\langle y_k,\ y_l \rangle\}^{-1}.$$

En appliquant l'inégalité (7.4.27) aux éléments $\varphi_1^n(\lambda), \ldots, \varphi_N^n(\lambda)$ et $\psi_1^n(\lambda)/h(\lambda), \ldots, \psi_N^n(\lambda)/h(\lambda)$ de l'espace hilbertien $L_{(-\infty,\ \infty)}(F)$ on peut écrire

$$\{\sigma_{kj}^n\} = \{\langle \varphi_i^n,\ \varphi_j^n \rangle_F\} \geqslant$$

$$\geqslant \{\langle \varphi_i^n,\ \psi_k^n \rangle_G\} \left\{ \int \frac{2\pi g(\lambda)}{h(\lambda)} \psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_l^n(\lambda)}\, G^0(d\lambda) \right\}^{-1} \{\langle \varphi_j^n,\ \psi_l^n \rangle_G\}^*,$$

car les éléments $\psi_1^n/h, \ldots, \psi_N^n/h$ sont linéairement indépendants et, sous la condition (7.4.12), les éléments $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_N^n$ font partie de l'espace hilbertien $L^1_{(-\infty,\ \infty)}(G)$, de plus

$$\left\langle \varphi_i^n(\lambda),\ \frac{\psi_k^n(\lambda)}{h(\lambda)} \right\rangle_F = \langle \varphi_i^n,\ \psi_k^n \rangle_G, \quad i,\ k = 1, \ldots, N,$$

$$\left\langle \frac{\psi_k^n(\lambda)}{h(\lambda)},\ \frac{\psi_l^n(\lambda)}{h(\lambda)} \right\rangle_F = \int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_j^{(n)}(\lambda)}\, G(d\lambda),$$

$$k,\ j = 1, \ldots, N.$$

(Rappelons que $h(\lambda) = f(\lambda)/g(\lambda)$ et $g(\lambda) = 1/2\pi\, |Q(e^{i\lambda})|^2$.)

A partir de la représentation spectrale (7.4.2) et vu l'absence du biais des estimations $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$, il vient

$$\alpha_i \equiv M_\theta \tilde{\alpha}_i^n \equiv \int \varphi_i^n(\lambda) M_\theta \Phi(d\lambda) \equiv$$

$$\equiv \int \varphi_i^n(\lambda) \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \overline{\psi_k^n(\lambda)}\, G(d\lambda), \quad i = 1, \ldots, N,$$

d'où, les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant quelconques, on tire

$$\{\langle \varphi_i^n,\ \psi_k^n \rangle_G\} = E$$

(E est la matrice unité). Par conséquent

$$\{\sigma_{kj}^n\} \geqslant \left\{ \int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_j^n(\lambda)}\, G(d\lambda) \right\}^{-1}.$$

Comme sous la condition (7.4.12), quand $1/f(\lambda) \geqslant c > 0$, on a l'inégalité $\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \geqslant c \int H^0(d\lambda)$, il vient que, en même temps que la matrice $H^0 = \int H^0(d\lambda)$, sera régulière la matrice

$\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda)$, et à partir de la relation (7.4.22) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0 \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left\{ \int\int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \frac{\psi_k^n(\lambda)}{\|\tilde{\theta}_k^n\|_{G^0}} \frac{\overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\tilde{\theta}_j^n\|_{G^0}} G(d\lambda) \right\}^{-1} = 2\pi \left\{ \int\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \right\}^{-1}.$$

Ainsi, sous la condition (7.4.12), pour des estimations linéaires non biaisées quelconques $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ dont la matrice de corrélation est $\{\sigma_{kj}^n\}$ on a l'inégalité (7.4.26).

Montrons que pour les meilleures estimations (de matrice de corrélation $\{s_{kj}^n\}$) cette inégalité devient une égalité.

Il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0 \leqslant 2\pi \left[\int\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1}. \qquad (7.4.28)$$

Démontrons l'inégalité (7.4.28). Sous la condition (7.4.12) la fonction positive c o n t i n u e $1/f(\lambda)$ peut être approchée aussi exactement que l'on veut par des polynômes trigonométriques (positifs), toujours représentables sous la forme $2\pi \mid Q(e^{i\lambda}) \mid^2$. Donc dans la formule (7.4.25) on peut prendre la densité pseudo-spectrale

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi \mid Q(e^{i\lambda}) \mid^2},$$

différant aussi peu que l'on veut de la densité spectrale $f(\lambda)$. Comme on a toujours $\{s_{kj}^n\} \leqslant \{\sigma_{kj}^n\}$, il vient également

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \left[\int\int \frac{1}{g(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1} \left[\int\int \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)^2} H^0(d\lambda) \right] \left[\int\int \frac{1}{g(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1},$$

où $g(\lambda)$ peut être prise aussi voisine que l'on veut de $f(\lambda)$, et par conséquent l'inégalité (7.4.28) doit également être vérifiée.

Des relations (7.4.26) et (7.4.28) découle le résultat suivant.

T h é o r è m e 9. *Sous la condition* (7.4.12) *et supposant que la mesure spectrale régulière* $H^0(d\lambda)$ *existe, on a la formule asymptotique suivante pour la matrice de corrélation* $\{s_{kj}^n\}$ *des meilleures estimations non biaisées:*

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0 = 2\pi \left[\int\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1}. \qquad (7.4.29)$$

Les résultats obtenus ci-dessus permettent de trouver les conditions d'efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures.

Rappelons que l'efficacité d'une estimation non biaisée $\tilde{\alpha}$ du paramètre α, dans le cas où il existe la meilleure estimation non biaisée $\hat{\alpha}$ de α à variance minimale, est donnée par la relation $\frac{\mathrm{M}(\hat{\alpha}-\alpha)^2}{\mathrm{M}(\tilde{\alpha}-\alpha)^2}$. Les estimations $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ sont appelées alors *asymptotiquement efficaces* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}(\hat{\alpha}_k^n-\alpha_k)^2}{\mathrm{M}(\tilde{\alpha}_k^n-\alpha_k)^2}=1, \qquad k=1, \ldots, N.$$

Montrons que, dans le cas qui nous intéresse, l'efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ équivaut à la condition

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0 = \lim D_n^0 \{\sigma_{kj}\} D_n^0. \tag{7.4.30}$$

En effet, dans le cas que nous étudions il existe des matrices limites régulières

$$\{a_{kj}\}=\lim D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0, \quad \{b_{kj}\}=\lim D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0$$

définies positives, dont tous les éléments diagonaux

$$a_{kk} = \lim d_k^n s_{kk}^n d_k^n \quad \text{et} \quad b_{kk} = \lim d_k^n \sigma_{kk}^n d_k^n$$

sont par conséquent différents de zéro (d_k^n sont ici les éléments diagonaux de la matrice de normalisation D_n^0). La condition (7.4.30) signifie que $\{a_{kj}\} = \{b_{kj}\}$ et en particulier que

$$\lim (d_k^n)^2 s_{kk}^n = \lim (d_k^n)^2 \sigma_{kk}^n \neq 0.$$

Par conséquent, sous la condition (7.4.30), la condition d'efficacité asymptotique $\lim s_{kk}^n/\sigma_{kk}^n = 1$, $k = 1, \ldots, N$, se trouve remplie. Cette condition signifie à son tour que $\sigma_{kk}^n - s_{kk}^n = o\{\sigma_{kk}^n\}$, où $\sigma_{kk}^n \sim b_{kk}(d_k^n)^{-2}$ et comme la matrice $\{\sigma_{kj}^n - s_{kj}^n\}$ n'est pas négative, pour tout $k, j = 1, \ldots, N$ on a

$$|\sigma_{kj}^n - s_{kj}^n| \leqslant (\sigma_{kk}^n - s_{kk}^n)^{1/2} (\sigma_{jj}^n - s_{jj}^n)^{1/2} = o\left\{\sqrt{\sigma_{kk}^n \sigma_{jj}^n}\right\}.$$

D'où on déduit que, dans le cas des estimations asymptotiquement efficaces

$$b_{kj} = \lim d_k^n [s_{kj}^n + (\sigma_{kj}^n - s_{kj}^n)] d_j^n = \\ = a_{kj} + \lim d_k^n (\sigma_{kj}^n - s_{kj}^n) d_j^n = a_{kj}, \\ k, j = 1, \ldots, N,$$

c'est-à-dire que l'on a la relation (7.4.30).

Nous allons utiliser les formules asymptotiques (7.4.25) et (7.4.29). Soit une mesure matricielle normée du type (7.4.23)

$$H^*(d\lambda)=\left[\int \frac{1}{g(\lambda)} H^0(d\lambda)\right]^{-1/2} \frac{1}{g(\lambda)} H^0(d\lambda) \left[\frac{1}{g(\lambda)} H^0(d\lambda)\right]^{-1/2},$$

où $g(\lambda)$ est la densité pseudo-spectrale. Dans ce cas, lorsque les formules (7.4.25) et (7.4.29) sont vérifiées, la condition nécessaire et suffisante d'efficacité asymptotique (condition équivalente à (7.4.30)) est

$$\int h(\lambda) H^*(d\lambda) = \left[\int \frac{1}{h(\lambda)} H^*(d\lambda) \right]^{-1}, \tag{7.4.31}$$

avec $h(\lambda) = f(\lambda)/g(\lambda)$.

Montrons que, *pour que cette égalité soit vérifiée, il faut et il suffit que la matrice scalaire* $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} E$ *soit constante presque partout par rapport à* $H^*(d\lambda)$: $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} E = C$, *plus exactement*

$$\left(\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} E - C \right) H^*(d\lambda) \equiv 0, \tag{7.4.32}$$

où E *est la matrice unité et* $C = \{c_{kj}\}$ *une matrice constante.*

Pour la démonstration, introduisons les densités

$$h_{kj}(\lambda) = \frac{H_{kj}(d\lambda)}{m(d\lambda)}, \qquad k, j = 1, \ldots, N$$

(par rapport à une mesure $m(d\lambda)$) et écrivons la matrice positive $\{h_{kj}(\lambda)\}$ comme un produit

$$\{h_{kj}(\lambda)\} = \{\varphi_{ik}(\lambda)\} \{\varphi_{kj}(\lambda)\},$$

où $\{\varphi_{ik}\}$ est la racine carrée positive de la matrice $\{h_{ij}\}$. Les fonctions vectorielles $\varphi_i(\lambda) = \{\varphi_{i1}(\lambda), \ldots, \varphi_{iN}(\lambda)\}$ peuvent être considérées comme des éléments de l'espace hilbertien où le produit scalaire des éléments $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ et $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ est donné par la formule

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(\lambda) \overline{\psi_k(\lambda)} \, m(d\lambda).$$

Considérant les éléments

$$\sqrt{h} \varphi_i = \{\sqrt{h(\lambda)} \varphi_{i1}, \ldots, \sqrt{h(\lambda)} \varphi_{iN}\}, \quad i = 1, \ldots, N$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \varphi_i = \left\{ \frac{1}{\sqrt{h(\lambda)}} \varphi_{i1}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{h(\lambda)}} \varphi_{iN}(\lambda) \right\}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

on voit que

$$\{\langle \sqrt{h} \varphi_i, \sqrt{h} \varphi_j \rangle\} = \int h(\lambda) H^*(d\lambda)$$

et

$$\left\{ \left\langle \frac{1}{\sqrt{h}} \varphi_i, \frac{1}{\sqrt{h}} \varphi_j \right\rangle \right\} = \int \frac{1}{h(\lambda)} H^*(d\lambda),$$

de plus

$$\left\{\left\langle \sqrt{h}\varphi_i,\ \frac{1}{\sqrt{h}}\varphi_j\right\rangle\right\}=\int H^*(d\lambda)=E.$$

L'égalité (7.4.31) peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\{\langle\sqrt{h}\varphi_i,\ \sqrt{h}\varphi_j\rangle\}=\left\{\left\langle\sqrt{h}\varphi_i,\ \frac{1}{\sqrt{h}}\varphi_k\right\rangle\right\}\times$$
$$\times\left\{\left\langle\frac{1}{\sqrt{h}}\varphi_k,\ \frac{1}{\sqrt{h}}\varphi_l\right\rangle\right\}^{-1}\left\{\left\langle\sqrt{h}\varphi_j,\ \frac{1}{\sqrt{h}}\varphi_l\right\rangle\right\}.$$

Cette relation est en général une inégalité (voir (7.4.27)), l'égalité n'ayant lieu que quand les vecteurs $\sqrt{h(\lambda)}\varphi_1(\lambda_1), \ldots, \sqrt{h(\lambda)}\varphi_N(\lambda)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\frac{1}{\sqrt{h(\lambda)}}\varphi_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, \frac{1}{\sqrt{h(\lambda)}}\varphi_N(\lambda)$, c'est-à-dire quand pour une certaine matrice constante $C=\{c_{ij}\}$ presque partout par rapport à $m(d\lambda)$ on a

$$\sqrt{h(\lambda)}\varphi_{ik}(\lambda)=\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\frac{1}{\sqrt{h(\lambda)}}\varphi_{jk}(\lambda),\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ N.$$

D'où

$$h(\lambda)\sum_{k=1}^{N}\varphi_{ik}(\lambda)\varphi_{kj}(\lambda)=h(\lambda)h_{ij}(\lambda)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\Big[\sum_{l=1}^{N}c_{il}\varphi_{lk}(\lambda)\Big]\varphi_{kj}(\lambda)=\sum_{k}c_{ik}h_{kj}(\lambda),$$

ainsi, presque partout par rapport à $m(d\lambda)$ on a

$$\left(\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}E-\{c_{ik}\}\right)\{h_{kj}(\lambda)\}=0,$$

ou

$$\left(\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}E-C\right)H^*(d\lambda)=0,$$

ce qu'il fallait démontrer. L'égalité (7.4.32) permet d'obtenir facilement le résultat suivant.

Théorème 10. *Sous la condition* (7.4.12), *pour l'efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures des coefficients* $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_N$ *dans le développement* (7.4.1) (*correspondant à la densité pseudo-spectrale* $g(\lambda)$) *il faut et il suffit que la fonction matricielle* $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}E$ *soit constante presque partout par rapport à* $H^0(d\lambda)$.

3. Efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures (cas continu). Considérons le problème de la recherche des estimations

pseudo-meilleures $\widetilde{\alpha}_1^n, \ldots, \widetilde{\alpha}_N^n$ d'après les observations du processus $\xi(t)$ sur l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\tau = \tau_n \to \infty$, dans le cas continu. Dans quelle mesure les formules asymptotiques de la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ obtenues pour le cas discret peuvent être généralisées au cas continu?

Il est évident que la mesure spectrale $H^0(d\lambda) = \{H_{kj}^0(d\lambda)\}$ de la fonction vectorielle $\{\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)\}$ peut être déterminée de la même manière que dans le cas discret, c'est-à-dire que les composantes $H_{kj}^0(d\lambda)$ sont données par les relations

$$R_{kj}(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\tau \theta_k(t+s)\,\theta_j(t)\,dt}{\sqrt{\int_0^\tau \theta_k(t)^2\,dt}\sqrt{\int_0^\tau \theta_j(t)^2\,dt}} = \int e^{i\lambda s} H_{kj}^0(d\lambda), \quad k, j = 1, \ldots, N \qquad (7.4.33)$$

(en supposant de plus que la fonction $\{R_{kj}(s)\}$ soit continue au 0).

Soit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\tau \theta_k(t)^2\,dt = \infty$$

et

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\tau} |\theta_k(t)| = o\left\{\sqrt{\int_0^\tau \theta_k(t)^2\,dt}\right\}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

et la densité spectrale $f(\lambda)$ est H^0-admissible *), $H^0(d\lambda)$ étant régulière. Comme dans le cas du temps discret, la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ des estimations des moindres carrés satisfait alors à la relation (7.4.16):

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0 = 2\pi R(0)^{-1} \int f(\lambda)\, H^0(d\lambda)\, R(0)^{-1},$$

où $R(0) = H^0 = \int H^0(d\lambda)$, et D_n^0 est une matrice diagonale du type

$$D_n^0 = \begin{Vmatrix} \sqrt{\int_0^\tau \theta_1(t)^2\,dt} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\int_0^\tau \theta_N(t)^2\,dt} \end{Vmatrix}. \qquad (7.4.34)$$

*) Voir la définition à la page 294.

Mais, lors de l'étude des estimations pseudo-meilleures correspondant à une densité pseudo-spectrale $g(\lambda)$ du type

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi\,|Q(i\lambda)|^2}, \tag{7.4.35}$$

où $Q(z) = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k$ est un polynôme à coefficients réels, il y a lieu de répondre à la question si le passage à la limite dans une relation du type (7.4.22) est légitime, car la fonction $Q(i\lambda)$ n'est pas bornée pour $-\infty < \lambda < \infty$. La même question se pose lorsqu'on se sert d'une formule du type (7.4.29) car la densité spectrale $f(\lambda)$ est intégrable et la fonction $1/f(\lambda)$ n'est pas bornée pour $-\infty < \lambda < \infty$.

Supposons que les fonctions $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$ admettent $2m$ dérivées continues et pour les fonctions $\{y_1(t), \ldots, y_N(t)\}$, où

$$y_k(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta(t), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{7.4.36}$$

il existe une mesure spectrale régulière, que nous désignerons par $H(d\lambda) = \{H_{kj}(d\lambda)\}$. Supposons de plus que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\tau}\left|\frac{d^k}{dt^k}\theta_j(t)\right| = o\left\{\sqrt{\int_0^\tau y_j(t)^2\,dt}\right\} \tag{7.4.37}$$

$$k=0, \ldots, 2m;\ j=1, \ldots, N.$$

Sous la condition (7.4.37) l'existence de la mesure spectrale $H(d\lambda)$ est équivalente à une convergence faible (vers $H(d\lambda)$) de la suite des mesures matricielles $M^n(d\lambda) = \{M^n_{kj}(d\lambda)\}$ de composantes

$$M^n_{kj}(d\lambda) = \frac{\tilde{y}^n_k(\lambda)}{\|\tilde{y}^n_k\|_{G^0}}\,\frac{\overline{\tilde{y}^n_j(\lambda)}}{\|\tilde{y}^n_j\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda), \quad k, j = 1, \ldots, N, \tag{7.4.38}$$

où

$$\tilde{y}^n_k(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t} y_k(t)\,dt, \quad k = 1, \ldots, N$$

$(\tau = \tau_n \to \infty)$ et $G^0(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\,d\lambda$, c'est-à-dire que pour une fonction bornée et continue $\varphi(\lambda)$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(\lambda)\,M^n(d\lambda) = \int \varphi(\lambda)\,H(d\lambda).$$

Reportons-nous à la formule (7.4.3) donnant les estimations pseudo-meilleures, construites d'après la densité pseudo-spectrale $g(\lambda)$ du type (7.4.35) et soit l'équation intégrale correspondante

$$\theta(t) = \int e^{-i\lambda t}\psi(\lambda)\,\frac{d\lambda}{2\pi\,|Q(i\lambda)|^2}, \quad 0\leqslant t\leqslant\tau \tag{7.4.39}$$

(du type (7.4.6)) par rapport à la fonction $\psi(\lambda) \in L_{[0,\tau]}(G)$.

Supposons que la fonction $\theta(t)$, $-\infty < t < \infty$, soit pour tous les t définie comme dans (7.4.39). Le polynôme $Q(z)$ dans (7.4.35) étant une fonction extérieure (par rapport au demi-plan inférieur), pour toute fonction $\psi(\lambda)$ du sous-espace $L_{[0,\infty)}(G)$ le rapport $\psi(\lambda)/Q(-i\lambda)$ sera une fonction de $L_{[0,\infty)}(G^0)$ (voir § 2, chapitre II), donc pour la solution $\psi(\lambda) \in L_{[0,\tau]}(F)$ et la fonction correspondante $\theta(t)$ on aura

$$Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t) = \int e^{-i\lambda t}\frac{\psi(\lambda)}{Q(-i\lambda)}\frac{d\lambda}{2\pi} = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0.$$

Pour des raisons analogues on aura

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta(t) = \int e^{-i\lambda t}\frac{\psi(\lambda)}{Q(i\lambda)}\frac{d\lambda}{2\pi} = 0 \quad \text{pour} \quad t > \tau$$

car $\psi(\lambda)/Q(i\lambda) \in L_{(-\infty,\tau]}(G^0)$.

On voit que la solution $\psi(\lambda) \in L_{[0,\tau]}(G)$ de l'équation intégrale (7.4.39) est la transformée de Fourier *) généralisée de la fonction généralisée

$$z(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t) = Q\left(-\frac{d}{dt}\right)Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta(t).$$

Mais pour $0 < t < \tau$ le premier membre de l'équation (7.4.39) coïncide avec la fonction initiale $\theta(t)$ admettant $2m$ dérivées ordinaires; la fonction ordinaire $Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t)$, comme démontré ci-dessus, s'annule pour $-\infty < t < 0$ et par conséquent la fonction généralisée $z(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\left[Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t)\right]$ pour $-\infty < t < \tau$ s'obtient par application de l'opérateur différentiel $Q\left(\frac{d}{dt}\right)$ à la fonction ordinaire $Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t)$ lisse par morceaux, s'annulant pour $-\infty < t < 0$ et admettant $2m$ dérivées pour $0 < t < \tau$.

Il en est de même pour $z(t)$ lorsque $0 < t < \infty$, de sorte que finalement on obtient la formule suivante**) pour la fonction généralisée $z(t)$:

$$z(t) = z_0(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a'_k \delta^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} b'_k \delta^{(k)}(t-\tau),$$

où les coefficients a'_k et b'_k sont des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre non supérieur à $m-1$ des fonctions $Q\left(-\frac{d}{dt}\right)\theta(t)$ et $Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta(t)$ aux points limites $t = 0$ et $t = \tau$, les fonctions généralisées $\delta^{(k)}(t)$ et $\delta^{(k)}(t-\tau)$ sont les dérivées k-ièmes de fonctions δ

*) Voir, par exemple, [6].
**) Voir, par exemple, [22], page 191.

aux mêmes points $t = 0$ et $t = \tau$, $z_0(t)$ étant une fonction ordinaire de la forme

$$z_0(t) = \begin{cases} Q\left(-\frac{d}{dt}\right) Q\left(\frac{d}{dt}\right) \theta(t) & \text{pour} \quad 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{pour tous les autres } t. \end{cases}$$

En introduisant la fonction

$$y(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \theta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

on peut écrire la solution $\psi(\lambda)$ de l'équation (7.4.39) comme suit:

$$\psi(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t}\left[Q\left(-\frac{d}{dt}\right) y(t)\right] dt + \sum_{k=0}^{m-1} a'_k (i\lambda)^k + \sum_{k=0}^{m-1} b'_k e^{i\lambda\tau} (i\lambda)^k.$$

En intégrant par parties on a

$$\int_0^\tau e^{i\lambda t}\left[Q\left(-\frac{d}{dt}\right) y(t)\right] dt =$$

$$= Q(i\lambda) \int_0^\tau e^{i\lambda t} y(t)\, dt + \sum_{k=0}^{m-1} a''_k (i\lambda)^k + \sum_{k=0}^{m-1} b''_k e^{i\lambda\tau} (i\lambda)^k,$$

où les coefficients a''_k et b''_k sont des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre non supérieur à $m - 1$ de la fonction $y(t)$ aux points limites $t = 0$ et $t = \tau$. En utilisant l'égalité obtenue

la solution $\psi(\lambda)$ *de l'équation* (7.4.39) *peut s'écrire sous la forme* (comparer avec (7.4.21))

$$\psi(\lambda) = Q(i\lambda)\, \tilde{y}(\lambda) + r(\lambda), \tag{7.4.40}$$

où

$$\tilde{y}(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t} y(t)\, dt,$$

et les coefficients a_k *et* b_k *dans l'expression*

$$r(\lambda) = \sum_0^{m-1} a_k (i\lambda)^k + \sum_0^{m-1} b_k e^{i\lambda\tau} (i\lambda)^k$$

sont des combinaisons linéaires des dérivées d'ordre non supérieur à $2m-1$ *de la fonction initiale* $\theta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, *aux points limites* $t = 0$ *et* $t = \tau$:

$$a_k = \sum_{j=0}^{2m-1} c'_{kj} \theta^{(j)}(0), \qquad b_k = \sum_{j=0}^{2m-1} c''_{kj} \theta^{(j)}(\tau).$$

Appliquons les résultats obtenus aux fonctions $\psi_1^n(\lambda), \ldots, \psi_N^n(\lambda)$ ayant servi à construire les estimations pseudo-meilleures $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots$

. . ., $\widetilde{\alpha}_N^n$ (voir (7.4.6)). D'après la formule (7.4.40)

$$\psi_k^n(\lambda) = Q(i\lambda)\,\widetilde{y}_k^n(\lambda) + r_k^n(\lambda), \qquad (7.4.41)$$
$$k = 1, \ldots, N,$$

où sous la condition (7.4.37) le « reste » $r_k^n(\lambda)$ satisfait à la relation

$$|r_k^n(\lambda)| = o\,\{|\lambda|^{m-1}\,\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}\},$$

et donc pour la mesure pseudo-spectrale $G(d\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi|Q(i\lambda)|^2}$ (où $Q(z)$ est un polynôme de degré $2m$) on a

$$\|r_k^n\|_G = o\,\{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}\}.$$

A partir de (7.4.41) il est facile d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\psi_k^n\|_G}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}} = 1$$

et sous la condition de convergence faible des mesures $M_{kj}^n(d\lambda)$ introduites ci-dessus (voir (7.4.38)) on a

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(\lambda) \frac{\psi_k^n(\lambda)\,\overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\psi_k^n\|_G\,\|\psi_j^n\|_G} G(d\lambda) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi(\lambda) \frac{y_k^n(\lambda)}{\|y_k^n\|_{G^0}} \frac{\overline{y_j^n(\lambda)}}{\|y_j^n\|_G} G^0(d\lambda) =$$
$$= \int \varphi(\lambda) H_{kj}(d\lambda), \quad k, j = 1, \ldots, N \qquad (7.4.42)$$

(pour une fonction bornée et continue quelconque $\varphi(\lambda)$). On voit que les mesures matricielles $H^n(d\lambda) = \{H_{kj}^n(d\lambda)\}$ de composantes

$$H_{kj}^n(d\lambda) = \frac{\psi_k^n(\lambda)\,\overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\|\psi_k^n\|_G\,\|\psi_j^n\|_G} G(d\lambda), \quad k, j = 1, \ldots, N,$$

convergent faiblement vers la mesure spectrale $H(d\lambda) = \{H_{kj}(d\lambda)\}$ de la fonction vectorielle $\{y_1(t), \ldots, y_N(t)\}$.

Ainsi

pour la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ *des estimations pseudo-meilleures on a la formule asymptotique* (7.4.11) *dans laquelle* $H(d\lambda)$ *est la mesure spectrale des fonctions* (7.4.36), *à savoir*:

$$\lim_{n\to\infty} D_n\{\sigma_{kj}^n\} D_n = H^{-1}\left[\int \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} H(d\lambda)\right] H^{-1}, \qquad (7.4.43)$$

où $H = \int H(d\lambda)$, D_n *est une matrice diagonale*

$$D_n = \begin{pmatrix} \|\widetilde{y}_1^n\|_{G^0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\widetilde{y}_N^n\|_{G^0} \end{pmatrix},$$

et la densité spectrale $f(\lambda)$ *et la densité pseudo-spectrale* $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi\,|Q(i\lambda)|^2}$ *sont telles que le rapport* $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ *soit H-admissible* *).

Voyons comment sont liées les mesures spectrales $H(d\lambda)$ et $H^0(d\lambda)$.

En intégrant par parties on peut trouver la relation suivante, analogue à (7.4.41)

$$\widetilde{y}_k^n(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t}\left[Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta(t)\right]dt = Q(-i\lambda)\,\widetilde{\theta}_k^n(\lambda) + r_k^n(\lambda),$$

où, conformément aux désignations précédentes,

$$\widetilde{\theta}_k^n(\lambda) = \int_0^\tau e^{i\lambda t}\theta_k(t)$$

et le reste $r_k^n(\lambda)$ satisfait (sous la condition (7.4.37)) à la relation

$$\|r_k^n\|_G = o\{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}\}.$$

Donc, si la suite $M^n(d\lambda)$ converge lentement, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2}\,\frac{|\widetilde{y}_k^n(\lambda)|^2}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2}\,M_{kk}^n(d\lambda) = \int \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2}\,H_{kk}(d\lambda)$$

ainsi que

$$\lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2}\,\frac{|\widetilde{y}_k^n(\lambda)|^2}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}}.$$

On voit donc qu'il existe une limite finie et différente de 0

$$d_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

De plus, on peut facilement voir que

$$\int \frac{\varphi(\lambda)}{|Q(i\lambda)|^2}\,H_{kj}(d\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int \frac{\varphi(\lambda)}{|Q(i\lambda)|^2}\,\frac{\widetilde{y}_k^n(\lambda)\,\overline{\widetilde{y}_j^n(\lambda)}}{\|\widetilde{y}_k^n\|_{G^0}\,\|\widetilde{y}_j^n\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda) =$$

$$= d_k\left[\lim_{n\to\infty}\int \varphi(\lambda)\,\frac{\widetilde{\theta}_k^n(\lambda)\,\overline{\widetilde{\theta}_j^n(\lambda)}}{\|\widetilde{\theta}_k^n\|_{G^0}\,\|\widetilde{\theta}_j^n\|_{G^0}}\,G^0(d\lambda)\right]d_j = d_k\left[\int \varphi(\lambda)\,H^0(d\lambda)\right]d_j$$

pour toute fonction bornée et continue $\varphi(\lambda)$.

---

*) Comparer avec la condition (7.3.5) introduite précédemment, qui se trouve remplie si le rapport $f(\lambda)/g(\lambda)$ est borné.

Ceci montre que si la mesure spectrale $H\,(d\lambda)$ des fonctions $y_k\,(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta_k\,(t)$, $k = 1, \ldots, N$, existe, les fonctions initiales $\theta\,(t)$, $k = 1, \ldots, N$, ont également une mesure spectrale $H^0\,(d\lambda)$ liée à $H\,(d\lambda)$ par la relation

$$H^0\,(d\lambda) = d^{-1}\left[\frac{1}{|\,Q\,(i\lambda)\,|^2}\,H\,(d\lambda)\right]d^{-1}, \qquad (7.4.44)$$

où la matrice diagonale

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_N \end{pmatrix}$$

a pour éléments diagonaux

$$d_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\|\,\widetilde{\theta}_k^n\,\|_{G^0}}{\|\,\widetilde{y}_k^n\,\|_{G^0}}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Si maintenant en utilisant la relation (7.4.44) on passe dans la formule (7.4.42) de $H\,(d\lambda)$ à $H^0\,(d\lambda)$ et que l'on remplace la matrice de normalisation D_n par la matrice

$$D_n^0 = \begin{pmatrix} \|\,\widetilde{\theta}_1^n\,\|_{G^0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\,\widetilde{\theta}_N^n\,\|_{G^0} \end{pmatrix} = dD_n,$$

on obtient en particulier le résultat suivant.

Théorème 11. *Si la densité pseudo-spectrale* $g\,(\lambda) = 1/2\pi|Q_0\,(i\lambda)\,|^2$ *est telle que la fonction* $h\,(\lambda) = \frac{f\,(\lambda)}{g\,(\lambda)}$ *soit bornée, la densité spectrale* $f\,(\lambda)$ *continue* *), *si de plus les fonctions* $\left\{Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta_1\,(t), \ldots, Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta_N\,(t)\right\}$ *possèdent une mesure spectrale non dégénérée et la condition* (7.4.37) *est remplie, on a alors pour la matrice de corrélation des estimations pseudo-meilleures la formule asymptotique suivante* **) (comparer avec (7.4.25)) :

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0\,\{\sigma_{kj}^n\}\,D_n^0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int\frac{1}{g\,(\lambda)}\,H^0\,(d\lambda)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\int h\,(\lambda)\,\frac{1}{g\,(\lambda)}\,H^0\,(d\lambda)\right]\left[\int\frac{1}{g\,(\lambda)}\,H^0\,(d\lambda)\right]^{-1}, \qquad (7.4.45)$$

---

*) Il suffit en fait de supposer que la fonction $h\,(\lambda) = f\,(\lambda)/g\,(\lambda)$ est H-admissible.

**) Il y a lieu de noter que la formule (7.4.45) a été obtenue et généralisée au cas des densités pseudo-spectrales positives uniformément continues $g\,(\lambda)$ admettant une limite $\lim_{\lambda\to\pm\infty} g\,(\lambda)\,\lambda^{2m}$ par A. Holévo *Sur les estimations des coefficients de régression* (en russe). Teoria veroiatnostei i eïe primenenia XIV. n° 1 (1969), 78-101.

où $H^0(d\lambda)$ *est la mesure spectrale des fonctions* $\theta_1(t), \ldots, \theta_n(t)$ *et* $h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$.

Notons que pour une densité spectrale du type $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} | Q(i\lambda) |$ cette formule donne l'expression asymptotique suivante pour la matrice de corrélation $\{s_{kj}^n\}$ des meilleures estimations non biaisées:

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{s_{kj}^n\} D_n^0 = 2\pi \left[\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1} \qquad (7.4.46)$$

(comparer avec (7.4.29)).

Cherchons maintenant les conditions pour lesquelles l'inégalité (7.4.26) établie pour le cas discret, sous la condition $f(\lambda) \asymp 1$, sera vérifiée. Cette dernière condition peut avoir, par exemple, la forme

$$f(\lambda) \asymp (1 + \lambda^2)^{-m}, \qquad (7.4.47)$$

où m est un nombre entier positif.

Considérons les estimations pseudo-meilleures, construites d'après la densité spectrale $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} | Q(i\lambda) |^2$ où $Q(z) = (1 + iz)^m$ et supposons que les fonctions $y_k(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \theta_k(t)$, $k = 1, \ldots, N$, possèdent la mesure spectrale $H(d\lambda)$. Tout comme lors de l'établissement de l'inégalité (7.4.26), on obtient pour la matrice de corrélation $\{\sigma_{kj}^n\}$ des estimations linéaires non biaisées quelconques $\widetilde{\alpha}_1^n, \ldots$ $\ldots, \widetilde{\alpha}_N^n$ l'inégalité suivante:

$$\{\sigma_{kj}^n\} \geqslant \left\{ \int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_k^n(\lambda)} G(d\lambda) \right\}^{-1}$$

(notons que sous la condition (7.4.47) la fonction $g(\lambda)/f(\lambda)$ est bornée, plus exactement $g(\lambda)/f(\lambda) \asymp 1$). En utilisant la relation générale (7.4.42), on en déduit que, dans le cas d'une densité spectrale continue $f(\lambda)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} D_n \{\sigma_{kj}^n\} D_n \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left\{ \int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \frac{\psi_k^n(\lambda) \overline{\psi_j^n(\lambda)}}{\| \widetilde{y}_k^n \|_{G^0} \| \widetilde{y}_j^n \|_{G^0}} G(d\lambda) \right\}^{-1} = \left[\int \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} H(d\lambda) \right]^{-1}.$$

En passant ici de $H(d\lambda)$ à $H^0(d\lambda)$ (voir (7.4.44)) et compte tenu que $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} | Q(i\lambda) |^2$ on arrive à

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0 \geqslant 2\pi \left[\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda) \right]^{-1}$$

qui est une inégalité du type (7.4.26).

Supposons maintenant que la densité spectrale $f(\lambda)$ ne satisfait pas à la condition (7.4.47) mais seulement à la condition

$$f(\lambda) \geqslant k (1 + \lambda^2)^{-m}. \qquad (7.4.48)$$

où k est une constante positive. Introduisons la densité spectrale auxiliaire

$$f_r(\lambda) = \min\{r(1+\lambda^2)^{-m}, f(\lambda)\}.$$

Il est évident que $f_r(\lambda)$ satisfait à la condition (7.4.47) et si $\{\sigma_{kj}^n\}_r$ est la matrice de corrélation des mêmes estimations linéaires $\tilde{\alpha}_1^n, \ldots$ $\ldots, \tilde{\alpha}_N^n$ que ci-dessus mais calculée par rapport à la densité spectrale $f_r(\lambda)$, en vertu de l'inégalité qui vient d'être démontrée, on a

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\}_r D_n^0 \geqslant 2\pi \left[\int \frac{1}{f_r(\lambda)} H^0(d\lambda)\right]^{-1}.$$

Comme $f(\lambda) \geqslant f_r(\lambda)$, de toute évidence il vient

$$\{\sigma_{kj}^n\} \geqslant \{\sigma_{kj}^n\}_r$$

et

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0 \geqslant 2\pi \left[\int \frac{1}{f_r(\lambda)} H^0(d\lambda)\right]^{-1}$$

pour $r > 0$ quelconque. Mais pour $r \to \infty$ la suite de fonctions à décroissance monotone $1/f_r(\lambda)$ a pour limite $1/f(\lambda)$, de sorte que

$$\lim_{r\to\infty} \int \frac{1}{f_r(\lambda)} H^0(d\lambda) = \int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} D_n^0 \{\sigma_{kj}^n\} D_n^0 \geqslant 2\pi \left[\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda)\right]^{-1}, \qquad (7.4.49)$$

où pour une densité spectrale $f(\lambda)$ bornée et sous la condition que la matrice $H^0 = \int H^0(d\lambda)$ est régulière, la matrice $\int \frac{1}{f(\lambda)} H^0(d\lambda)$ est aussi régulière.

On arrive ainsi au résultat suivant.

Théorème 12. *Si la densité spectrale* $f(\lambda)$ *est continue et satisfait à la condition* (7.4.48), *les fonctions* $\left\{Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta_1(t), \ldots\right.$ $\left.\ldots, Q\left(\frac{d}{dt}\right)\theta_N(t)\right\}$, *où* $Q\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(1+\frac{d}{dt}\right)^m$, *possèdent une mesure spectrale non dégénérée et la condition* (7.4.37) *se trouve remplie, pour la matrice de corrélation* $\{\sigma_{kj}^n\}$ *d'estimations non biaisées linéaires quelconques on a l'inégalité asymptotique* (7.4.49) *où* $H^0(d\lambda)$, *est également la mesure spectrale non dégénérée des fonctions initiales* $\{\theta_1(t), \ldots$ $\ldots, \theta_N(t)\}$.

Evidemment, tout comme dans le cas du temps discret (voir théorème 8), sous la condition que les relations (7.4.45) et (7.4.49) soient vérifiées,

pour l'efficacité asymptotique des estimations pseudo-meilleures, construites d'après la densité pseudo-spectrale $g(\lambda)$ *il suffit que la fonction matricielle* $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}E$ *soit constante presque partout par rapport à la mesure*

matricielle $H^0(d\lambda)$; *sous la condition supplémentaire* (7.4.46), *c'est en même temps la condition nécessaire d'efficacité asymptotique.*

Exemple. Soit $N=2$ et

$$\theta_1(t)=P_1(t)\int e^{i\lambda t}m_1(d\lambda),\quad \theta_2(t)=P_2(t)\int e^{i\lambda t}m_2(d\lambda),$$

où $P_1(t)$ et $P_2(t)$ sont des polynômes en t de degré n_1 et n_2 respectivement, dont les coefficients des termes de degré supérieur sont égaux à 1, et $m_1(d\lambda)$ et $m_2(d\lambda)$ sont des mesures finies.

Désignons par Λ_1 et Λ_2 l'ensemble des points λ pour lesquels respectivement $m_1(\lambda)\neq 0$ et $m_2(\lambda)\neq 0$. Il est facile de voir que la mesure spectrale $H^0(d\lambda)=\{H^0_{kj}(d\lambda)\}$ des fonctions $\{\theta_1(t),\ \theta_2(t)\}$ est purement discrète et se trouve concentrée aux points $\lambda\in\Lambda_1\cup\Lambda_2$, plus exactement *)

$$H^0(\lambda)=d^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2n_1+1}|m_1(\lambda)|^2 & \frac{1}{n_1+n_2+1}m_1(\lambda)\,m_2(\lambda)\\ \frac{1}{n_1+n_2+1}\overline{m_1(\lambda)}\,m_2(\lambda) & \frac{1}{2n_2+1}|m_2(\lambda)|^2\end{pmatrix}d^{-1},$$

où d est une matrice diagonale du type

$$d=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2n_1+1}\sum|m_1(\lambda)|^2} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2n_2+1}\sum|m_2(\lambda)|^2}\end{pmatrix}.$$

Dans le cas où les ensembles Λ_1 et Λ_2 sont disjoints, la condition que $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}E$ soit constante presque partout par rapport à $H^0(d\lambda)$ équivaut à ce que le rapport $f(\lambda)/g(\lambda)$ soit constant sur chacun des « éléments du spectre » $\Lambda_1\cup\Lambda_2$. Cette condition est évidemment toujours remplie si le spectre n'a que des points uniques $\lambda_1\in\Lambda_1$, et $\lambda_2\in\Lambda_2$. Dans le cas où le spectre $\Lambda_1\cup\Lambda_2$ se compose d'un nombre fini de points $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, la condition mentionnée d'efficacité asymptotique sera remplie pour une densité pseudo-spectrale $g(\lambda)$ du type (7.4.35) telle que $g(\lambda)=f(\lambda)$ pour $\lambda=\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

*) Voir, par exemple, [28].

BIBLIOGRAPHIE

1. ACHIESER N. I.— Cours de théorie des approximations (en russe). Moscou, 1965.
2. ACHIESER N. I., GLAZMAN I. M.— Théorie des opérateurs linéaires dans l'espace hilbertien (en russe). Moscou, 1966.
3. BARI N. K.— Séries trigonométriques (en russe). Moscou, 1961.
4. BARI N. K.— Systèmes biorthogonaux et bases dans l'espace hilbertien (en russe). Utchonye Zapiski M.G.U., série math., 4 (1961), 69-107.
5. GUELFAND I. M., VILENKINE N. Ya.— Fonctions généralisées, IV. Quelques applications de l'analyse harmonique. Espaces de Hilbert munis (en russe). Moscou, 1961.
6. GUELFAND I. M., CHILOV G. E.— Fonctions généralisées et leur utilisation (en russe). Moscou, 1958.
7. GUELFOND A. O.— Calcul des différences finies (en russe). Moscou-Leningrad, 1952.
8. GUIHMAN I. I., SKOROHOD A. V.— Introduction à la théorie des processus aléatoires (en russe). Moscou, 1965.
9. GOLOUSINE G. M.— Théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe (en russe). Moscou, 1957.
10. HOFFMAN K.— Banach spaces of analytic functions. London, 1962.
11. GRENANDER U., SZEGÖ G.— Toeplitz forms and their applications. University of California Press, 1958.
12. DOOB J. L.— Stochastic processes. J. Wiley, N. Y., 1953.
13. ZYGMUND A.— Trigonometric series. 2d Ed., Cambrige University Press, 1959.
14. IBRAHIMOV I. A., LINNIK Ju. V.— Variables indépendantes et stationnairement liées (en russe). Moscou, 1965.
15. KRILOV V. I.— Fonctions régulières dans un demi-plan (en russe). Mathem. sbornik 4, nº 46 (1938), 9-30.
16. LÉVINE B. Ja.— Répartition des racines des fonctions entières (en russe). Moscou, 1956.
17. LEHMANN E. L.— Testing statistical hypothesis. John Wiley, N. Y., 1959.
18. MARKOUCHEVITCH A. I.— Théorie des fonctions analytiques (en russe). Moscou, 1950.
19. PINSKER M. S.— Information et stabilité informationnelle des variables et des processus aléatoires (en russe). Moscou, 1960.
20. PRIVALOV I. I.— Propriétés aux limites des fonctions analytiques (en russe). Moscou-Leningrad, 1950.
21. PONTRIAGUINE L. S.— Equations différentielles ordinaires (en russe). Moscou, 1961.
22. ROZANOV Y. A. — Processus aléatoires stationnaires (en russe). Moscou, 1963.
23. ROZANOV Y. A. — Distributions gaussiennes de dimension infinie (en russe). Moscou, 1968.
24. SZEGÖ G.— Orthogonal polynomials. Am. math. Society, Colloquium Publications, nº 23, 1939.

25. TIMAN A. F.— Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable réelle (en russe). Moscou, 1960.
26. HILLE E.— Functional analysis and semi-groups. N. Y., 1948.
27. CRAMER H., LEADBETTER M.— Stationary and related stochastic processes. N. Y.-London, 1967.
28. GRENANDER U., ROSENBLATT M.— Statistical analyses of stationary time series. N. Y., 1956.

